Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Вибіркові розділи з дисципліни «Вища математика» з Maple підтримкою





Розроблено в рамках проекту “Erasmus+ (CBHE) BioArt “Інноваційна мультидисциплінарна освітня програма зі штучних імплантів для біоінженерії для бакалаврів та магістрів” Developed in the frame of project “Erasmus+ (CBHE) BioArt“Innovative Multidisciplinary Curriculum in Artificial Implants for Bio-Engineering BSc / MSc Degrees” (586114-EPP- 1-2017- 1-ES- EPPKA2-CBHE- JP).

Вінниця
ВНТУ
2020

Рецензенти:

доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики ВНТУ В. І. Клочко;

доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики ВНТУ І. В. Хом’юк.

Навчальний посібник з вивчення вибіркових розділів дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 163 - Біомедична інженерія освітня програма Біомедична інженерія / Уклад. В. М. Михалевич. – Вінниця : ВНТУ, 2020.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за рівнем бакалавра зі спеціальності 163 - Біомедична інженерія, освітня програма - Біомедична інженерія.

Зміст

ВСТУП…….…….. 4

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНО АЛГЕБРИ ……..…… 6
1.1 Створення матриць і векторів……..……... 6
1.2 Дії над матрицями…….…….…. 7
1.2.1 Множення матриці на число або числа на матрицю……..… 7
1.2.2 Складання матриць…… .8
1.2.3 Транспонування матриці…… .8
1.2.4 Множення матриць…… .8
1.2.5 Дії над матрицями під час налаштуванням нейронних мереж …. 10
1.3 Визначники……..……... 13
1.3.1 Обчислення визначника…… 13
1.3.2 Властивості визначника…… 18
1.4 Обернена матриця……..…… 20
1.5 Розв'язування систем лінійних рівнянь……..……. 20
1.5.1 Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою стандартних команд системи Maple …….. 20
1.5.2 Методи розв'язування системи лінійних рівнянь ……..…….. 22
1.5.3 Завдання для самостійної роботи ……..…… 32
1.5.3.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса ……..……..… 32
1.5.3.2 Розв'язати за допомогою інтелектуального тренажера систему чотирьох лінійних рівнянь трьома методами (методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса) ……..…….. 35
1.6 Власні числа і вектори матриці ……. 43
1.6.1 Застосування СКМ до знаходження власних чисел та власних векторів матриці …… 47
1.6.2 Завдання для самостійної роботи ……..…… 59

2. РЯДИ ФУР'Є ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ ……. 60
2.1 Ортогональність функцій ……..…….. 60
2.2 Ряди Фур'є ……..……..…….. 65
2.3 Розкладання в ряд Фур'є парних, непарних, періодичних функцій з довільним періодом та неперіодичних функцій ..…….. 69
2.4 Розв'язування прикладних задач в середовищі системи комп'ютерної математики…….…….. 74

3. МЕТОД МОНТЕ –КАРЛО ……..……... 103
3.1 Сутність метода Монте –Карло.…..…….. 103
3.2 Випадкові величини та їх моделювання ……..…….. 105
3.2.1 Дискретні випадкові величини ……..…….…… 105
3.2.2 Неперервні випадкові величини ……..…….…… 108
3.3 Моделювання випадкових величин ..…….…….. 109
3.3.1 Генерування псевдовипадкових послідовностей ……..…… 110
3.3.2 Моделювання дискретних випадкових величин ……..…… 112
3.3.3 Моделювання неперервних випадкових величин ……..…… 116
3.4 Розв'язання прикладних задач ..…….. 120
3.4.1 Наближене знаходження визначених інтегралів ……..…… 120
3.4.2 Завдання для самостійної роботи ……..……..… 134
3.4.3 Статистичне моделювання властивостей штучних імплантів …. 144

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ……..……...…... 147

Вступ

Вища математична освіта на сучасному етапі стикається з низкою проблем. Внаслідок об'єктивних процесів протягом останніх десятиліть спостерігається поступове зменшення годин, що відводяться в навчальних планах на вивчення математики для студентів технічних закладів вищої освіти (ТЗВО). В той же час технічний прогрес різних галузей надзвичайно швидкий, що спонукає зростання вимог до рівня математичної підготовки майбутніх фахівців різних спеціальностей. Це призводить до недопустимості не тільки скорочення або вилучення деякіх розділів та тем з поточної програми з вищої математики, а навпаки, потрібно розширювати змістовні модулі або ж відновлювати раніше вилучені теми та розділи. Важливим аспектом є й той факт, що в сучасних умовах математичний рівень студентів групи, навіть одної і тої самої спеціальності, суттєво неоднорідний і навчання математики має містити такі основні складові особистісно орієнтованого навчання, як індивідуалізація та диференціація, мають бути забезпечені умови для ефективної самостійної роботи студентів. Переважна більшість фахівців шукають розв'язування описаних суперечностей в застосуванні інформаційно-комунікаційних технологій і, в першу чергу, систем комп'ютерної математики, що мають деякі ознаки штучного інтелекту.

В той же час численні спроби фахівцями усіх країн імплементувати використання таких систем в курсі віищої математики ТЗВО показали суттєве зростання інформаційного навантаження на студента, що в багатьох випадках не тільки зменшувало позитивний ефект, а й призводило до отримання негативного результату. Цей негативний результат, зокрема, пов'язаний і з підміною навчальних задач з вищої математики навчальними задачами з інформатики.

На наш погляд, ефективний шлях розв'язування багатьох описаних суперечностей полягає в створенні й використанні так званих «інтелектуальних тренажерів». Під такими тренажерами розумітимемо програми, що надають змогу в автоматизованому режимі отримати покроковий розв'язок математичної задачі зі всіма необхідними поясненнями.

Використання інтелектуальних тренажерів надає такі нові унікальні можливості для студентів:

1. Переглянути розв'язування довільної кількості індивідуальних типових завдань з новим унікальним рівнем наочності результатів, що отримуються.
2. Використати ці тренажери, як вичерпний довідник, у разі виникнення утруднень під час переходу до наступного кроку розв'язування поточної типової математичної задачі.
3. Самостійно перевірити правильність виконання завдань.
4. Отримати альтернативні варіанти методичного висвітлення

покрокового ходу розв’язування типових математичних задач.

По суті інтелектуальні тренажери є віртуальними репетиторами.

Інтелектуальні тренажерів можуть використовуватися викладачем під час лекційних, практичних, лабораторних занять, а також для організації самостійної роботи студентів.

Наявність інтелектуальних тренажерів надасть можливість ефективного та зручного механізму запровадження рівня пояснень замість рівня відтворення для тих випадків, де це може виявитися доцільним.

Сама ідея заміни, в деяких випадках, рівня відтворення рівнем пояснень в такій акцентованій формі нами висувається вперше та виноситься на широке обговорення фахівцями.

При визначенні доцільності зазначеної заміни потрібно звертати увагу, насамперед, на рівень засвоєння навичок розв’язування студентами типових математичних задач, що передбачають громіздкі рутинні обчислення.

Саме шлях заміни, в окремих випадках, рівня відтворення рівнем пояснень, може, на наш погляд, бути розглянутий, як компромісне рішення деяких вище описаних суперечностей, що виникають під час організації навчання вищій математиці студентів ТЗВО в сучасних умовах значного прискорення темпів науково-технічного прогресу.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНО АЛГЕБРИ

Середовище Maple дозволяє виконувати всі стандартні операції, визначені в лінійній алгебрі. Вони стають доступні при підключенні бібліотеки linalg або більш нового пакета LinearAlgebra.

1.1 Створення матриць і векторів

Для задання матриці використовується команда matrix. Причому задавати матрицю можна різними способами, як видно з декількох прикладів:

```
restart:
with(linalg):
A:=matrix([[1,1,1],[4,1,6],[7,1,9]]);#Квадратна матриця 3 порядку
a:=matrix([[2,x^2,4,5.3,alpha]]);#Матриця - рядок
A1:=matrix(4,4,[seq(k^2,k=3..18)]);#Квадратна матриця 4 порядку
a1:=matrix(3,3,-10);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a := [2 \quad x^2 \quad 4 \quad 5.3 \quad \alpha]$$

$$A1 := \begin{bmatrix} 9 & 16 & 25 & 36 \\ 49 & 64 & 81 & 100 \\ 121 & 144 & 169 & 196 \\ 225 & 256 & 289 & 324 \end{bmatrix}$$

$$a1 := \begin{bmatrix} -10 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Доволі зручний відносно новий синтаксис запису матриць

```
A:=<<0|0>,<0|1>>;#Квадратна матриця 2 порядку
E:=<<3,2,2,1>|<2,2,1,2>|<1,3,1,3>>;#Матриця розмірності (4x3)
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
f:= (k) -> a^(k-1):
Vector(3,f);
Vector[row]([a^(k-1)$k=1..6]);
convert(Vector(3,f),Matrix);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$[1, a, a^2, a^3, a^4, a^5]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

1.2 Дії над матрицями.

```
restart:
with(linalg):
```

1.2.1 Множення матриці на число або числа на матрицю:

```
A<<1|-2|1>,<3|1|5>,<2|7|-1>,<0|1|0>>;
 alpha*'A'=alpha*A;
4*'A'=4*A;
'A'*4=A*4;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 3\alpha & \alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & 7\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 12 & 4 & 20 \\ 8 & 28 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 12 & 4 & 20 \\ 8 & 28 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Складання матриць

```
A:=<<3|2|1>,<5|0|6>>;
B:=<<-2|-1|-2>,<3|10|-2>>;
C:=A+B:`C=A+B`=C;
`B-A`=B-A;
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B\text{-}A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -3 \\ -2 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Транспонування матриці

Транспонування матриці A виконується за допомогою команди transpose(A):

```
'A'=A;
`transpose(A)`=transpose(A);
```

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$transpose(A) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

1.2.4 Множення матриць

Для розуміння суті цієї операції розглянемо приклад множення матриці-рядка на матрицю-стовпець:

```
dimColRow:=4:m:=1:r:=1:
a:=matrix(m,dimColRow):b:=matrix(dimColRow,r):
`a`=evalm(a);`b`=evalm(b);
print(`c=a*b`);c:=evalm(a&*b);
```

$$a = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad a_{1,4}]$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \\ b_{4,1} \end{bmatrix}$$

$$c = a*b$$

або

```
dimColRow:=3:m:=3:r:=2:
```

```
a:=matrix(m,dimColRow):b:=matrix(dimColRow,r):
`a`=evalm(a);`b`=evalm(b);
print(`c=a*b`);c:=evalm(a&*b);
```

$$a = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$c=a*b$$

$$c := \begin{bmatrix} a_{1,1}\,b_{1,1} + a_{1,2}\,b_{2,1} + a_{1,3}\,b_{3,1} & a_{1,1}\,b_{1,2} + a_{1,2}\,b_{2,2} + a_{1,3}\,b_{3,2} \\ a_{2,1}\,b_{1,1} + a_{2,2}\,b_{2,1} + a_{2,3}\,b_{3,1} & a_{2,1}\,b_{1,2} + a_{2,2}\,b_{2,2} + a_{2,3}\,b_{3,2} \\ a_{3,1}\,b_{1,1} + a_{3,2}\,b_{2,1} + a_{3,3}\,b_{3,1} & a_{3,1}\,b_{1,2} + a_{3,2}\,b_{2,2} + a_{3,3}\,b_{3,2} \end{bmatrix}$$

Матриці співмножники повинні задовольняти умову: кількість стовпців першої матриці повинна дорівнювати кількості рядків другої матриці. В результаті дістаємо матрицю розмірності (*m* x *n*), де m - кількість рядків першої матриці, *n* - кількість стовпців другої матриці:

```
A:=matrix(2,3,[1,2,-3,3,2,0]):
B:=matrix(3,2,[3,1,2,4,-1,1]):
A=evalm(A);B=evalm(B);`A*B`=evalm(A&*B);
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

Якщо ця умова не виконується, буде отримано повідомлення

```
`b*c`=evalm(b&*c);
Error, (in linalg[multiply]) non matching dimensions for
vector/matrix product
```

"помилка, невідповідність розмірності для операції множення матриць".

Щоб визначити кількість рядків або стовпців матриці, необхідно виконати такі операції:

```
` кількість рядків матриці A`=rowdim(A);
`кількість стовпців матриці A`=coldim(A);
print(`Розмірність матриці A`);
```

```
matrix(1,3,[rowdim(A),`*`,coldim(A)]);
```

кількість рядків матриці A=2

кількість стовпців матриці A=3

Розмірність матриці A

[2 * 3]

1.2.5 Дії над матрицями під час налаштуванням нейронних мереж

Приклад 1.2.1.

Мережа Хопфілда

За один цикл визначити образ вектора $\boldsymbol{Y}$ = [1, -1,1, -1] за допомогою мережі Хопфілда, навчання якої було здійснено на зразках $\boldsymbol{X_1}$ = [-1,1, -1,1], $\boldsymbol{X_2}$= [1, -1,1 , 1], $\boldsymbol{X_3}$ = [-1,1, -1, -1]. Якщо вектор був розпізнаний, вказати номер відповідного зразка.

Розв'язування.

```
restart;
```

Підключаємо команди пакета LinearAlgebra.

```
with(LinearAlgebra):
```

Кожен зразок $\boldsymbol{X_k}$, k = 1, ..., 3 представляємо у вигляді відповідного вектора. Отримуємо матрицю

$$W = \sum_{k=1}^{3} X_k \cdot X_k^T$$

```
X[1]:=<-1, 1,-1, 1>:
X[2]:=< 1,-1, 1, 1>:
X[3]:=<-1, 1,-1,-1>:
W:=add(X[i].Transpose(X[i]),i=1..3);
```

$$W := \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Обнуляємо діагональ матриці

```
for i to 4 do W[i,i]:=0; od:
```

'W'=W;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Y:=<1,-1,1, -1>:
```

Множимо отриману матрицю на вектор **Y**

```
X0=W&*Y;
X0:=W.Y;
```

$$X0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \&* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X0 := \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

За допомогою функції знака $sign(x) = -1$ при $x < 0$ і $sign(x) = 1$ при $x \geq 0$ отримуємо образ

```
Y01:=map(sign,X0);
```

$$Y01 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Образ відповідає вектору $\boldsymbol{X_2}$, отже, мережа за один прохід розпізнала у векторі ***Y*** зразок 2.

◄

Завдання для самостійної роботи.

За один цикл визначити образ $Y01$ вектора Y за допомогою мережі Хопфілда, навчання якоъ було здійснено на зразках $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$. Якщо вектор був розпізнаний, вказати номер відповідного зразка.

Задача 1.	Задача 2.
X_1 = **[1,-1,1,-1]**	X_1 = **[1,-1,1,1]**
X_2= **[-1, 1, 1, -1]**	X_2= **[-1, -1, 1, 1]**
X_3 = **[-1,-1,-1,1]**	X_3 = **[1,-1,-1,-1]**

Y = **[-1,-1,1, 1]**	Y = **[1, -1,1, -1]**
Задача 3. X_1 = **[1,1,-1,1]** X_2= **[-1, 1, 1, 1]** X_3 = **[1,1,-1,-1]** Y = **[1, -1,1, -1]**	Задача 4. X_1 = **[-1,1,-1,-1]** X_2= **[-1, -1, 1, -1]** X_3 = **[1,1,1,-1]** Y = **[1, -1, -1,1]**
Задача 5. X_1 = **[-1,-1,1,1]** X_2= **[1, -1, -1, -1]** X_3 = **[-1,1,-1,-1]** Y = **[1, -1,1, -1]**	Задача 6. X_1 = **[-1,1,-1,1]** X_2= **[1, 1, -1, 1]** X_3 = **[1,1,1,1]** Y = **[1, -1, -1,-1]**
Задача 7. X_1 = **[-1,-1,1,-1]** X_2= **[-1, -1, -1, 1]** X_3 = **[1,-1,-1,1]** Y = **[1,1, -1,1]**	Задача 8. X_1 = **[1,1,1,-1]** X_2= **[1, -1, -1, 1]** X_3 = **[1,1,-1,1]** Y = **[-1,1,1,1]**
Задача 9. X_1 = **[-1,-1,1,1]** X_2= **[1, 1, 1, 1]** X_3 = **[-1,-1,1,-1]** Y = **[-1,1,1, -1]**	Задача 10. X_1 = **[1,-1,-1,-1]** X_2= **[-1, -1, 1, -1]** X_3 = **[1,-1,1,-1]** Y = **[1, -1, -1,1]**

1.3 Визначники

1.3.1 Обчислення визначника

```
restart:
with(linalg):
```

Для обчислення визначника використовується команда **det**

```
A:=matrix(2,3,[1,2,-3,3,2,0]):
B:=matrix(3,2,[3,1,2,4,-1,1]):
`det(A*B)`=det(A&*B);
```

$$det(A*B) = 32$$

Формулу обчислення визначника в символьному вигляді можна отримати таким чином:

```
m:=2:a:=matrix(m,m):`a`=evalm(a);
```

$$a = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
`det(a)`=det(a);
```

$$det(a) = a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}$$

Змінивши значення **m** на **3** або більше ціле число, отримаємо формулу для обчислення визначника більш високого порядку.

Для оволодіння технікою обчислення визначника за формулою розкладання можна скористатися командами визначення мінора minor(*A,n,m*). Однак тут треба бути уважним. В Maple під мінором розуміється матриця, отримана вилученням *n* - го рядка і *m* - го стовпця вихідної матриці.

```
m:=3:a:=matrix(m,m):
`a`=evalm(a);`minor(a,2,3)`=minor(a,2,3);
```

$$a = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$minor(a,2,3) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

Мінором M_{ij} до елементу a_{ij} визначника *n*-го порядку називається визначник (*n* - 1)-го порядка, що отриманий із початкового визначника

викреслюванням *i*-того рядка та *j*-того стовпця.

Отже, для отримання мінора, тобто визначника відповідної матриці, необхідно доповнити стандартну команду

```
det(minor(a,2,3));
```

$$a_{1,1}\,a_{3,2} - a_{1,2}\,a_{3,1}$$

Алгебраїчне доповнення нескладно визначити так

```
A[2,3]:=(-1)^(2+3)*det(minor(a,2,3));
```

$$A_{2,3} := -a_{1,1}\,a_{3,2} + a_{1,2}\,a_{3,1}$$

Під час освоєння техніки обчислення визначника за формулою розкладання нерідко викликають труднощі для студентів. Причому арифметичні помилки перемішуються із змістовними. Тому студенту самому часто буває важко знайти свої помилки. В результаті студенти змушені невиправдано багато часу приділяти для освоєння відповідної техніки. І справа тут навіть не в тому, що викладач не завжди поряд, а головне, що подібні питання змушують викладача працювати в режимі рутинних перевірок, тим самим знижуючи ефективність його роботи. Якщо ж дати студентові інструмент, за допомогою якого він сам зможе себе перевіряти, то в результаті не тільки викладач буде звільнений від частини рутинної роботи, а й робота самого студента буде більш ефективною за рахунок її більшої активності та самостійності.

З метою отримання символьного виразу для обчислення визначника за формулою розкладання може бути використана спеціально розроблена автором процедура **det_matrixS**, яка приведена нижче. Варто звернути увагу, що основна формула розкладання формується в циклі одним із двох однотипних операторів:

```
y:=sum('(-1)^(j+i)*a[j,i]*det*
     linalg['minor'](a,j,i)','i'=1..m):
```

або

```
y:=sum('(-1)^(j+i)*a[i,j]*det*
     linalg['minor'](a,i,j)','i'=1..m):
```

Переважна більшість решти операторів призначена для стандартних перевірок правильності задання аргументів процедури.

```
det_matrixS:=proc(a,j::integer, RowOrCol::string)
local y,i,m,n,detM,c;
m:=linalg[rowdim](a);
n:=linalg[coldim](a);
if m<>n then
```

```
     error("Матриця %1 повинна бути квадратною",a);
end if;
if (j<1) then
     error "Число j повинне бути натуральним числом,
що не перевищує m"
end if;
if m=1 then
  return(a[1,1]);
end if;
if RowOrCol="R" then
   y:=sum('(-1)^(j+i)*a[j,i]*det*
linalg['minor'](a,j,i)',
'i'=1..m):
else
   y:=sum('(-1)^(j+i)*
a[i,j]*det*linalg['minor'](a,i,j)',
'i'=1..m):
end if
end proc:
```

```
b:=matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7,8,-9]):print(B=evalm(b));
d1:=matrix(4,4,[1,2,3,4,5,6,7,8,-9,1,-
4,5,0,7,2,9]):print(D1=evalm(d1));
```

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$D1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -9 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Аргументами процедури обчислення визначника за формулою розкладення **det_matrixS** є матриця A, номер ряду, по якому буде проведено розкладання та вид ряду, - горизонтальний ("R"-"Row") або вертикальний ("C" - "Column")

```
`det(B)`=det_matrixS(b,2,"R");
`det(B)`=det_matrixS(b,3,"C");
`det(D1)`=det_matrixS(d1,4,"C");
```

$$det(B) = -4\, det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + 5\, det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} - 6\, det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = 3\ det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 6\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 9\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$det(D1) = -4\ det\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -9 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} + 8\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -9 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} - 5\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} + 9\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -9 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Розроблена процедура значною мірою ілюструє те, що автор розуміє під терміном “живі сторінки”. Змінивши вихідні дані, в даному випадку елементи матриці, ми автоматично отримаємо і відповідні зміни у всьому ході знаходження визначника. На основі приведеної процедури нескладно створити іншу процедуру, яка дає, так би мовити, не тільки перший рівень формули розкладання, а й додатково формули для обчислення всіх визначників до другого порядку включно, наприклад

$$det(B) = -4\ det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + 5\ det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} - 6\ det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} = 2\ det\ [-9] - 3\ det\ [\ 8]$$

$$det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} = det\ [-9] - 3\ det\ [\ 7]$$

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = det\ [\ 8] - 2\ det\ [\ 7]$$

За допомогою приведеної процедури можна отримати формулу для обчислення визначника в символьному вигляді

```
a:=matrix(3,3):print(A=evalm(a));
`det(A)`=det_matrixS(a,1,"R");
```

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{1,1}\ det\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} - a_{1,2}\ det\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} + a_{1,3}\ det\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

або

```
a:=matrix(4,4):print(A=evalm(a));
`det(A)`=det_matrixS(a,1,"C");
```

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{1,1}\, det\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} - a_{2,1}\, det\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$
$$+ a_{3,1}\, det\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} - a_{4,1}\, det\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix}$$

Для обчислення визначника можна скласти і власну процедуру, без використання відповідної стандартної команди **det**

```
det_matrix:=proc(a)
local i,m,n,detM,c;
m:=linalg[rowdim](a);
n:=linalg[rowdim](a);
if m<>n then
     error("Матриця %1 повинна бути квадратною",a);
end if;
if m=1 then
  return(a[1,1]);
end if;
detM:=0;
for i from 1 to m do
c:=linalg[minor](a,i,1);
 [seq(k,k=1..m)], [seq(k,k=2..m)]),i..i);
  detM:=detM+(-1)^(1+i)*a[i,1]*det_matrix(c);
end do;
end proc:
```

Обчислимо за допомогою складеної процедури визначник матриці **A**

```
A:=<<2|1|0>,<-3|4|0>,<-2|1|2>>;
det('A')=detA=det_matrix(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 22$$

В основу створення процедури **det_matrix** покладено алгоритм рекурсивного звернення до неї при обчисленні мінора.

1.3.2 Властивості визначника

Для перевірки властивостей визначника підійдуть такі команди. Команди для перестановки місцями двох рядків або двох стовпців - **swaprow**(A,i1,i2) або **swapcol**(A,j1,j2):

```
A:=<<1|1|1>,<4|1|6>,<7|1|9>>;
('A',1,3,R)=swaprow(A,1,3);#Міняються місцями перший і третій рядки
('A',2,1,C)=swapcol(A,2,1);#Міняються місцями перший і другий стовпці
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A,\ 1,\ 3,\ R) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A,\ 2,\ 1,\ C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

При перестановці двох стовпців знак визначника змінюється на протилежний

```
`det(A)`=det(A);`det('A',2,1,C)`=det(swapcol(A,2,1));
```

$$det(A) = 6$$

$$det('A',2,1,C) = -6$$

Очевидно, що при подвійній перестановці стовпців знак визначника не змінюється

```
`det((A,3,1,C),2,1,C)`=det(swapcol(swapcol(A,3,1),2,1)
);
```

$$det((A,3,1,C),2,1,C) = 6$$

Помножити стовпець з номером *j* на значення виразу *expr* можна командою mulcol(A,j,expr), а та ж сама дія для рядка з номером *i* виконується командою mulrow(A,i,expr):

```
A'=A;`mulcol(A,1,3)`=mulcol(A,1,3);
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$mulcol(A,1,3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 6 \\ 21 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Продемонструємо властивість визначника: *загальний множник елементів стовпця можна винести за знак визначника*

```
'Det'(mulcol(A,1,beta))-
beta*'Det'(A)=det(mulcol(A,1,beta))-beta*det(A);
```

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 4\,\beta & 1 & 6 \\ 7\,\beta & 1 & 9 \end{bmatrix}\right) - \beta\,\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Команди addrow(A,i,j,m) і addcol(A,i,j,m) призначені для множення ***i*-го** рядка (стовпця) на скалярний множник **m** і додавання до ***j*-го** рядка (стовпця).

```
A:=<<1|1|1>,<4|1|6>,<7|1|9>>;
`addcol(A,1,3,-1)`=addcol(A,1,3,-1);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$addcol(A,1,3,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Тобто перший і другий стовпець залишаються без змін, а на місце третього стовпця записується вираз (-1)*col(A,1) + col(A,3).

Неважко перевірити, що визначник матриці після подібних перетворень не змінюється

```
Det(A)-Det(addcol(A,1,3,-1))=det(A)-det(addcol(A,1,3,-
1));
```

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}\right) - \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Аналогічним чином можна переконатися, що визначник матриці не змінюється і при її транспонуванні

```
Det(A)-Det(A^T)=det(A)-det(transpose(A));
```

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}\right) - \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}^{T}\right) = 0$$

1.4 Обернена матриця

Для знаходження оберненої матриці призначена команда **inverse**(A)

```
A^`(-1)`=inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 6\\ 7 & 1 & 9\end{bmatrix}^{(-1)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-4}{3} & \frac{5}{6}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

За означенням добуток квадратної матриці *n*-го порядку A на обернену до неї має дорівнювати одиничній матриці E того самого порядку, тобто $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$. Перевіримо отриманий результат:

```
A*(A^`(-1)`)=A.inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 6\\ 7 & 1 & 9\end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 6\\ 7 & 1 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1.5 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.5.1 Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою стандартних команд системи Maple

```
restart:
with(linalg):
```

Система лінійних рівнянь, яка задається матрицями

```
A:=<<-3|2|-1>,<-1|1|1>,<2|1|2>>;
B:=Vector([2,0,2]);
X:=Vector([seq(x[k],k=1..coldim(A))]);
```

$$A := \begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix}2\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

має вигляд

```
c:=evalm(A&*X):
for i to coldim(A) do
   c[i]=B[i]
end do;
```

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

Вдаючись до нестандартного використання команди **piecewise** можна отримати в полі виведення результатів систему рівнянь, що записана в стандартній формі з лівою фігурною дужкою

```
eqi:=[seq( c[i]=B[i], i=1..3 )]:
piecewise(eqi[1],``,eqi[2],``,eqi[3],``);
```

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Для розв'язування матричного рівняння **AX=B** можна використовувати спеціально призначену команду **linsolve**(A,B), де A - матриця, X, B - матриці або вектори.

```
X=convert(linsolve(A, B),matrix);
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Також розв'язок системи лінійних рівнянь можна отримати за допомогою стандартної команди **solve**

```
eqi[];
```

```
solve({%},{x[1],x[2],x[3]});
```

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, -x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1\}$$

Команда **solve** використовується для отримання розв'язку лінійних та нелінійних рівнянь та систем рівнянь та має багато додаткових опцій.

1.5.2 Методи розв'язування системи лінійних рівнянь

Наведемо інтелектуальні репетитори у вигляді авторських Maple-процедур, що надають можливість отримати в автоматизованому режимі покроковий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь зі всіма необхідними поясненнями для кожного із трьох поширених методів: Гаусса, матричний Крамера. Далі наведено приклади, що демонструють роботу цих тренажерів. Системи трьох лінійних рівнянь традиційно використовуються для формування в студентів навичок їх розв'язування на рівні відтворення. Системи чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими може бути використана для набуття студентами навичок їх розв'язування на рівні пояснення.

Приклад 1.5.1. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
'A'=<<-3| 3| 7>, <-2|-1|3>,<6|4|-1>>, B=<38, 20,-21>;
```

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 7\\ -2 & -1 & 3\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}38\\ 20\\ -21\end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_gauss(A,B,'x');
```

```
Знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь
```

$$\begin{cases} -3x_1+3x_2+7x_3=38\\ -2x_1-x_2+3x_3=20\\ 6x_1+4x_2-x_3=-21 \end{cases}$$

```
методом виключення Гаусса, що реалізований за схемою єдиного ділення
Прямий хід методу виключення Гауса - схема єдиного ділення.
Крок 1
```

$$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & B\\ -3 & 3 & 7 & 38\\ -2 & -1 & 3 & 20\\ 6 & 4 & -1 & -21\end{bmatrix}\ \text{->}\ \begin{bmatrix}x_2 & x_3 & B\\ 9 & 5 & 16\\ -30 & -39 & -165\end{bmatrix}$$

```
Множимо рівняння № 2 на (-1).
Ділимо рівняння № 2 на 3.
```

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 9 & 5 & 16 \\ -30 & -39 & -165 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 9 & 5 & 16 \\ 10 & 13 & 55 \end{bmatrix}$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & B \\ 9 & 5 & 16 \\ 10 & 13 & 55 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} x_3 & B \\ 67 & 335 \end{bmatrix}$$

Ділимо рівняння № 1 на 67.

$$\begin{bmatrix} x_3 & B \\ 67 & 335 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} x_3 & B \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Обернений хід

$$x_3 = 5$$

$$9\,x_2 + 5\,x_3 = 16, \text{->} \left[x_2 = \frac{16}{9} - \frac{5}{9} x_3 \right], x_2 = -1$$

$$-3\,x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3 = 38, \text{->} \left[x_1 = -\frac{38}{3} + x_2 + \frac{7}{3} x_3 \right], x_1 = -2$$

Відповідь

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 5$$

◄

Приклад 1.5.2. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
A=<<-2| 6| -2| 0>, <0| 1| -2| 6>, <1| -3| -3| 4>,
<6| -3| -2| 0>>, B=<10, 44, 31, 24>;
```

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 44 \\ 31 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_gauss(A,B,'x');
Знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь
```

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 10 \\ x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 44 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 31 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 24 \end{cases}$$

методом виключення Гаусса, що реалізований за схемою єдиного ділення

Прямий хід методу виключення Гауса - схема єдиного ділення.

Ділимо рівняння № 1 на 2.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & B \\ -2 & 6 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 44 \\ 1 & -3 & -3 & 4 & 31 \\ 6 & -3 & -2 & 0 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & B \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 44 \\ 1 & -3 & -3 & 4 & 31 \\ 6 & -3 & -2 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & B \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 44 \\ 1 & -3 & -3 & 4 & 31 \\ 6 & -3 & -2 & 0 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & -2 & 6 & 44 \\ 0 & 4 & -4 & -36 \\ -15 & 8 & 0 & -54 \end{bmatrix}$$

Ділимо рівняння № 2 на 4.

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & -2 & 6 & 44 \\ 0 & 4 & -4 & -36 \\ -15 & 8 & 0 & -54 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & -2 & 6 & 44 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ -15 & 8 & 0 & -54 \end{bmatrix}$$

Крок 2

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & B \\ 1 & -2 & 6 & 44 \\ 0 & 1 & -1 & -9 \\ -15 & 8 & 0 & -54 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 1 & -1 & -9 \\ -22 & 90 & 606 \end{bmatrix}$$

Ділимо рівняння № 2 на 2.

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 1 & -1 & -9 \\ -22 & 90 & 606 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 1 & -1 & -9 \\ -11 & 45 & 303 \end{bmatrix}$$

Крок 3

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & B \\ 1 & -1 & -9 \\ -11 & 45 & 303 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} x_4 & B \\ 34 & 204 \end{bmatrix}$$

Ділимо рівняння № 1 на 34.

$$\begin{bmatrix} x_4 & B \\ 34 & 204 \end{bmatrix} \text{->} \begin{bmatrix} x_4 & B \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Обернений хід

$$x_4 = 6$$

$$x_3 - x_4 = -9, \text{->} [x_3 = -9 + x_4], x_3 = -3$$

$$x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 44, \text{->} [x_2 = 44 + 2x_3 - 6x_4], x_2 = 2$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \text{->} [x_1 = -5 + 3x_2 - x_3], x_1 = 4$$

Відповідь

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = 6$$

◄

Приклад 1.5.3. Розв'язати матричним методом систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
'A'=<<-3| 3| 7>, <-2|-1|3>,<6|4|-1>>, B=<38, 20,-21>;
```

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 38 \\ 20 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_matr(A,B,'x');
```

Застосуємо матричний метод для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 38 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 20 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 = -21 \end{cases}$$

Обчислимо детермінант матриці системи

$$\text{Det}(A) = 67$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$'A'_{1,1} = [-1]^{1+1}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{bmatrix},\ 'A'_{2,1} = [-1]^{1+2}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}3 & 7\\ 4 & -1\end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,1} = [-1]^{1+3}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}3 & 7\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$'A'_{1,2} = [-1]^{2+1}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 6 & -1\end{bmatrix},\ 'A'_{2,2} = [-1]^{2+2}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 6 & -1\end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,2} = [-1]^{2+3}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$'A'_{1,3} = [-1]^{3+1}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 6 & 4\end{bmatrix},\ 'A'_{2,3} = [-1]^{3+2}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,3} = [-1]^{3+3}\, linalg:\text{-}det\begin{bmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$A^{-1} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix}-11 & 31 & 16\\ 16 & -39 & -5\\ -2 & 30 & 9\end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}\,B$$

$$X = \frac{\begin{bmatrix}-11 & 31 & 16\\ 16 & -39 & -5\\ -2 & 30 & 9\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10\\ 44\\ 31\\ 24\end{bmatrix}}{\mathrm{Det}(A)}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix}-134\\ -67\\ 335\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\text{-> } x_1 = -2 \text{ ->}\\ \text{-> } x_2 = -\text{->}\\ \text{-> } x_3 = 5 \text{ ->}\end{bmatrix}$$

◀

Приклад 1.5.4. Розв'язати матричним методом систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
A=<<-2| 6| -2| 0>, <0| 1| -2| 6>, <1| -3| -3| 4>,
<6| -3| -2| 0>>, B=<10, 44, 31, 24>;
```

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 6\\ 1 & -3 & -3 & 4\\ 6 & -3 & -2 & 0\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}10\\ 44\\ 31\\ 24\end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_matr(A,B,'x');
```

Застосуємо матричний метод для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 10 \\ x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 44 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 31 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 24 \end{cases}$$

Обчислимо детермінант матриці системи

$$\det(A) = -544$$

Детермінант матриці системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A

$$'A'_{1,1} = [-1]^{1+1} det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{2,1} = [-1]^{1+2} det\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,1} = [-1]^{1+3} det\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{4,1} = [-1]^{1+4} det\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$'A'_{1,2} = [-1]^{2+1} det\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{2,2} = [-1]^{2+2} det\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,2} = [-1]^{2+3} det\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{4,2} = [-1]^{2+4} det\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$'A'_{1,3} = [-1]^{3+1} det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{2,3} = [-1]^{3+2} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,3} = [-1]^{3+3} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}, 'A'_{4,3} = [-1]^{3+4} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$'A'_{1,4} = [-1]^{4+1} det\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}, 'A'_{2,4} = [-1]^{4+2} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$'A'_{3,4} = [-1]^{4+3} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}, 'A'_{4,4} = [-1]^{4+4} det\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Знаходимо обернену матрицю коефіцієнтів системи рівнянь

$$A^{-1} = -\frac{1}{544}\begin{bmatrix} 14 & -72 & 108 & -104 \\ -48 & -64 & 96 & -32 \\ 114 & -120 & 180 & 8 \\ 46 & -120 & 44 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{\begin{bmatrix} 14 & -72 & 108 & -104 \\ -48 & -64 & 96 & -32 \\ 114 & -120 & 180 & 8 \\ 46 & -120 & 44 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 44 \\ 31 \\ 24 \end{bmatrix}}{\det(A)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{544}\begin{bmatrix} -2176 \\ -1088 \\ 1632 \\ -3264 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -> x_1 = 4 -> \\ -> x_2 = 2 -> \\ -> x_3 = -3 -> \\ -> x_4 = 6 -> \end{bmatrix}$$

◄

Приклад 1.5.5. Розв’язати матричним методом систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
'A'=<<-3| 3| 7>, <-2|-1|3>,<6|4|-1>>, B=<38, 20,-21>;
```

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 38 \\ 20 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Розв’язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_Kram(A,B,'x');
```

```
МЕТОД КРАМЕРА. МЕТОД КРАМЕРА. МЕТОД КРАМЕРА
----------------------------------------------------
```

$$\begin{cases} -3 x_1 + 3 x_2 + 7 x_3 = 38 \\ -2 x_1 - x_2 + 3 x_3 = 20 \\ 6 x_1 + 4 x_2 - x_3 = -21 \end{cases}$$

$$detA = \Delta, \Delta = 67$$

$$\Delta_1 = linalg{:-}det\left(\begin{bmatrix} 38 & 3 & 7 \\ 20 & -1 & 3 \\ -21 & 4 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_1 = 38\, det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - 3\, det\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -21 & -1 \end{bmatrix} + 7\, det\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ -21 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -134,\ x_1 = -2$$

$$\Delta_2 = linalg{:}\text{-}det\left(\begin{bmatrix} -3 & 38 & 7 \\ -2 & 20 & 3 \\ 6 & -21 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_2 = -3\ det\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -21 & -1 \end{bmatrix} - 38\ det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + 7\ det\begin{bmatrix} -2 & 20 \\ 6 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = -67,\ x_2 = -1$$

$$\Delta_3 = linalg{:}\text{-}det\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 & 38 \\ -2 & -1 & 20 \\ 6 & 4 & -21 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_3 = -3\ det\begin{bmatrix} -1 & 20 \\ 4 & -21 \end{bmatrix} - 3\ det\begin{bmatrix} -2 & 20 \\ 6 & -21 \end{bmatrix} + 38\ det\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = 335,\ x_3 = 5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},\ \text{->}\ \begin{bmatrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 5 \end{bmatrix}$$

◄

Приклад 1.5.6. Розв’язати матричним методом систему лінійних рівнянь, що задана матрицею коефіцієнтів A та стовпцем вільних членів B.

```
A=<<-2| 6| -2| 0>, <0| 1| -2| 6>, <1| -3| -3| 4>,
<6| -3| -2| 0>>, B=<10, 44, 31, 24>;
```

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 10 \\ 44 \\ 31 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Розв’язування.

Викликаємо відповідну процедуру

```
My_Kram(A,B,'x');
```

```
МЕТОД КРАМЕРА. МЕТОД КРАМЕРА. МЕТОД КРАМЕРА
----------------------------------------------------
```

$$\begin{cases} -2\,x_1 + 6\,x_2 - 2\,x_3 = 10 \\ x_2 - 2\,x_3 + 6\,x_4 = 44 \\ x_1 - 3\,x_2 - 3\,x_3 + 4\,x_4 = 31 \\ 6\,x_1 - 3\,x_2 - 2\,x_3 = 24 \end{cases}$$

$$detA = \Delta,\ \Delta = -544$$

$$\Delta_1 = \det\left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 & 0 \\ 44 & 1 & -2 & 6 \\ 31 & -3 & -3 & 4 \\ 24 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_1 = 10\ det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 6\ det\begin{bmatrix} 44 & -2 & 6 \\ 31 & -3 & 4 \\ 24 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 2\ det\begin{bmatrix} 44 & 1 & 6 \\ 31 & -3 & 4 \\ 24 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2176,\ x_1 = 4$$

$$\Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 44 & -2 & 6 \\ 1 & 31 & -3 & 4 \\ 6 & 24 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_2 = -2\ det\begin{bmatrix} 44 & -2 & 6 \\ 31 & -3 & 4 \\ 24 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 10\ det\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 2\ det\begin{bmatrix} 0 & 44 & 6 \\ 1 & 31 & 4 \\ 6 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = -1088,\ x_2 = 2$$

$$\Delta_3 = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 44 & 6 \\ 1 & -3 & 31 & 4 \\ 6 & -3 & 24 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_3 = -2\ det\begin{bmatrix} 1 & 44 & 6 \\ -3 & 31 & 4 \\ -3 & 24 & 0 \end{bmatrix} - 6\ det\begin{bmatrix} 0 & 44 & 6 \\ 1 & 31 & 4 \\ 6 & 24 & 0 \end{bmatrix} + 10\ det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = 1632,\ x_3 = -3$$

$$\Delta_4 = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 44 \\ 1 & -3 & -3 & 31 \\ 6 & -3 & -2 & 24 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_4 = -2\ det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 44 \\ -3 & -3 & 31 \\ -3 & -2 & 24 \end{bmatrix} - 6\ det\begin{bmatrix} 0 & -2 & 44 \\ 1 & -3 & 31 \\ 6 & -2 & 24 \end{bmatrix} - 2\ det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 44 \\ 1 & -3 & 31 \\ 6 & -3 & 24 \end{bmatrix}$$
$$- 10\ det\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_4 = -3264,\ x_4 = 6$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{->} \begin{bmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 6 \end{bmatrix}$$

◀

1.5.3. Завдання для самостійної роботи.

1.5.3.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома методами: методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

1) $+3x_1+1x_2+1x_3=16$ $-3x_1+4x_2-7x_3=4$ $+5x_1+3x_2-7x_3=32$	2) $+7x_1+6x_2-7x_3=15$ $-2x_1+0x_2+4x_3=-8$ $+1x_1+0x_2-3x_3=5$	3) $+5x_1+5x_2+1x_3=2$ $+6x_1-4x_2+3x_3=36$ $-4x_1+1x_2-6x_3=-27$
4) $-6x_1-6x_2+4x_3=32$ $-7x_1-3x_2-2x_3=16$ $+7x_1+7x_2-1x_3=-30$	5) $-1x_1-1x_2+3x_3=-7$ $+2x_1-4x_2-5x_3=13$ $-6x_1-1x_2+6x_3=-30$	6) $+6x_1+2x_2+2x_3=8$ $-6x_1+1x_2+3x_3=6$ $+5x_1-7x_2+1x_3=-20$
7) $+0x_1-1x_2-2x_3=1$ $-3x_1-7x_2-4x_3=3$ $-7x_1-2x_2-2x_3=14$	8) $+2x_1+1x_2-5x_3=15$ $+2x_1+0x_2-2x_3=12$ $+4x_1-1x_2+4x_3=11$	9) $-6x_1-6x_2-3x_3=0$ $-7x_1+1x_2+2x_3=-11$ $+5x_1-6x_2-5x_3=15$
10) $+3x_1+6x_2+0x_3=24$ $+4x_1-1x_2-1x_3=-10$ $-4x_1-3x_2-6x_3=11$	11) $-1x_1-3x_2+6x_3=-8$ $-3x_1+3x_2-4x_3=10$ $-7x_1-3x_2+4x_3=0$	12) $-2x_1-7x_2+0x_3=-35$ $+5x_1+1x_2+4x_3=-3$ $-3x_1+1x_2-6x_3=17$
13) $+6x_1+2x_2-2x_3=-2$ $+0x_1-4x_2+7x_3=28$ $-7x_1-2x_2+1x_3=-3$	14) $+5x_1+3x_2+3x_3=8$ $-2x_1+0x_2-1x_3=-3$ $-5x_1-1x_2+1x_3=-4$	15) $-4x_1+2x_2+0x_3=8$ $+6x_1-2x_2-3x_3=-11$ $-5x_1+0x_2-4x_3=-4$
16) $-5x_1+3x_2+4x_3=-5$ $+4x_1-5x_2+5x_3=-15$ $+7x_1-7x_2-7x_3=7$	17) $-6x_1-5x_2-7x_3=-17$ $+0x_1+1x_2-4x_3=-11$ $+4x_1+4x_2-2x_3=-4$	18) $+3x_1-7x_2-1x_3=-33$ $-3x_1+7x_2+5x_3=25$ $-1x_1+4x_2-3x_3=26$
19) $+2x_1-2x_2-6x_3=-4$ $-6x_1-1x_2+7x_3=8$ $+0x_1+7x_2-4x_3=-11$	20) $-5x_1+0x_2+7x_3=3$ $+6x_1+2x_2-1x_3=-13$ $-7x_1+4x_2+3x_3=7$	21) $+4x_1-7x_2+0x_3=-43$ $+5x_1-3x_2+7x_3=3$ $+3x_1+6x_2+6x_3=48$

22) $+3x_1 -1x_2 -7x_3 = -11$ $-5x_1 +0x_2 -1x_3 = 10$ $-3x_1 +2x_2 +5x_3 = 16$	23) $-3x_1 +4x_2 -4x_3 = -23$ $-4x_1 +6x_2 +2x_3 = -2$ $-2x_1 +5x_2 +1x_3 = -3$	24) $-4x_1 -4x_2 -5x_3 = 12$ $-7x_1 +4x_2 +5x_3 = -12$ $+3x_1 -1x_2 +5x_3 = 3$
25) $-2x_1 +3x_2 -3x_3 = 5$ $-5x_1 +1x_2 +7x_3 = 9$ $+7x_1 -6x_2 +7x_3 = -2$	26) $-4x_1 +5x_2 -6x_3 = 49$ $+4x_1 -4x_2 -2x_3 = -28$ $+0x_1 -3x_2 +1x_3 = -17$	27) $+2x_1 +6x_2 -4x_3 = -20$ $+5x_1 -1x_2 +0x_3 = 2$ $+5x_1 -2x_2 -5x_3 = -6$
28) $-6x_1 -4x_2 +3x_3 = -25$ $-5x_1 +7x_2 +0x_3 = -34$ $-1x_1 -3x_2 +4x_3 = -10$	29) $-7x_1 -5x_2 -2x_3 = -46$ $+7x_1 +6x_2 +1x_3 = 51$ $-5x_1 -4x_2 -7x_3 = -29$	30) $-1x_1 +1x_2 +5x_3 = -6$ $-4x_1 -4x_2 -2x_3 = 12$ $-2x_1 +0x_2 -1x_3 = 8$
31) $+7x_1 +6x_2 +7x_3 = -18$ $-1x_1 +5x_2 +7x_3 = -39$ $-5x_1 +3x_2 -7x_3 = -3$	32) $-3x_1 -2x_2 +1x_3 = -1$ $-3x_1 +5x_2 -3x_3 = -21$ $-1x_1 +5x_2 -1x_3 = -7$	33) $+2x_1 +0x_2 -4x_3 = -26$ $+4x_1 -1x_2 +6x_3 = 19$ $+3x_1 +6x_2 -3x_3 = -30$
34) $+4x_1 +1x_2 +2x_3 = 13$ $+0x_1 +4x_2 +5x_3 = 4$ $+1x_1 -1x_2 -6x_3 = 2$	35) $+7x_1 +7x_2 +1x_3 = 39$ $+2x_1 -6x_2 -5x_3 = -5$ $-7x_1 -5x_2 -1x_3 = -31$	36) $-1x_1 -7x_2 -3x_3 = 26$ $+0x_1 +1x_2 -3x_3 = 0$ $+4x_1 +1x_2 -1x_3 = -10$
37) $+4x_1 +7x_2 -2x_3 = -17$ $+4x_1 -7x_2 +4x_3 = 37$ $-4x_1 +2x_2 +6x_3 = -2$	38) $+7x_1 -7x_2 +7x_3 = -7$ $-3x_1 +1x_2 +5x_3 = 5$ $-7x_1 +1x_2 -3x_3 = -7$	39) $-3x_1 -6x_2 -1x_3 = 0$ $+4x_1 +1x_2 +2x_3 = 16$ $-1x_1 +4x_2 +3x_3 = -2$
40) $-6x_1 -4x_2 +7x_3 = -37$ $-4x_1 -5x_2 -4x_3 = -23$ $-4x_1 -4x_2 +3x_3 = -27$	41) $+5x_1 +3x_2 +6x_3 = 34$ $-2x_1 +1x_2 -2x_3 = -4$ $+1x_1 +2x_2 -5x_3 = 0$	42) $-1x_1 -5x_2 +0x_3 = 10$ $+4x_1 -2x_2 +0x_3 = 4$ $+3x_1 -7x_2 +2x_3 = 14$
43) $+4x_1 -2x_2 -1x_3 = 6$ $-1x_1 +3x_2 +0x_3 = -5$ $-3x_1 -6x_2 +7x_3 = 28$	44) $-3x_1 +4x_2 -5x_3 = -26$ $-6x_1 +0x_2 -1x_3 = -23$ $-7x_1 -3x_2 -5x_3 = -52$	45) $+5x_1 +1x_2 +2x_3 = -2$ $+6x_1 -3x_2 +2x_3 = -7$ $+4x_1 +3x_2 +3x_3 = 2$
46) $+1x_1 -3x_2 -1x_3 = 4$ $+7x_1 +0x_2 +1x_3 = -14$ $-7x_1 -2x_2 -5x_3 = 18$	47) $-6x_1 +2x_2 +3x_3 = 0$ $-1x_1 -2x_2 +3x_3 = 3$ $-7x_1 +6x_2 -7x_3 = -31$	48) $-4x_1 +0x_2 +6x_3 = 6$ $-1x_1 -1x_2 -2x_3 = 2$ $+5x_1 +1x_2 +1x_3 = -13$
49) $-7x_1 -3x_2 +7x_3 = 12$ $+2x_1 -2x_2 -2x_3 = -12$ $-4x_1 -4x_2 -1x_3 = -10$	50) $+2x_1 -6x_2 -7x_3 = 14$ $-4x_1 -2x_2 +1x_3 = 12$ $+5x_1 +6x_2 +0x_3 = -21$	51) $+2x_1 +7x_2 -3x_3 = 31$ $+6x_1 -6x_2 +1x_3 = -25$ $+2x_1 +3x_2 +5x_3 = 7$
52) $+3x_1 -2x_2 +5x_3 = 4$ $+5x_1 -4x_2 +3x_3 = 0$ $-4x_1 +7x_2 +7x_3 = 17$	53) $-5x_1 +2x_2 +2x_3 = 23$ $-2x_1 -7x_2 +0x_3 = -8$ $-2x_1 -1x_2 -3x_3 = -2$	54) $+0x_1 -7x_2 +3x_3 = -8$ $+7x_1 -3x_2 -2x_3 = -17$ $-2x_1 -4x_2 +1x_3 = -4$
55) $+7x_1 +6x_2 -4x_3 = 44$ $+4x_1 -1x_2 +2x_3 = -1$ $+0x_1 -6x_2 +7x_3 = -39$	56) $+2x_1 +4x_2 +4x_3 = 14$ $-6x_1 +0x_2 +1x_3 = -31$ $-1x_1 -6x_2 -5x_3 = -12$	57) $-1x_1 +0x_2 -7x_3 = -13$ $-1x_1 +7x_2 -3x_3 = -26$ $+0x_1 -2x_2 +0x_3 = 6$
58) $-2x_1 +1x_2 +6x_3 = 19$ $+1x_1 -2x_2 -7x_3 = -17$ $-5x_1 -5x_2 +4x_3 = 37$	59) $+5x_1 +0x_2 +5x_3 = -20$ $+0x_1 -6x_2 +2x_3 = -28$ $-3x_1 +3x_2 -1x_3 = 20$	60) $-1x_1 +2x_2 +1x_3 = 2$ $-6x_1 -3x_2 -7x_3 = 12$ $+6x_1 -3x_2 -4x_3 = -12$
61) $-3x_1 +7x_2 +1x_3 = -10$ $-5x_1 +6x_2 -7x_3 = -8$ $+3x_1 -4x_2 +7x_3 = 2$	62) $+2x_1 +1x_2 -1x_3 = 4$ $+4x_1 -7x_2 -5x_3 = -40$ $-7x_1 +1x_2 +7x_3 = 12$	63) $-4x_1 +5x_2 -6x_3 = -39$ $+7x_1 +5x_2 +5x_3 = 5$ $-4x_1 +2x_2 +2x_3 = 2$
64) $-5x_1 -4x_2 +2x_3 = 1$ $+0x_1 +6x_2 +1x_3 = -21$ $+4x_1 -1x_2 +4x_3 = -5$	65) $-2x_1 -1x_2 -2x_3 = -10$ $-5x_1 -1x_2 -5x_3 = -19$ $-3x_1 -7x_2 +5x_3 = -5$	66) $+7x_1 -3x_2 -1x_3 = -25$ $+6x_1 +0x_2 +6x_3 = 0$ $-1x_1 +5x_2 +3x_3 = 23$

67) $+6x_1+5x_2+4x_3=29$ $+0x_1+4x_2+1x_3=21$ $-3x_1+0x_2+6x_3=6$	68) $+7x_1-1x_2+4x_3=25$ $-6x_1+6x_2+1x_3=-31$ $+5x_1+4x_2+6x_3=10$	69) $-7x_1+6x_2+7x_3=23$ $+1x_1-2x_2-4x_3=-7$ $-6x_1+2x_2+1x_3=16$
70) $-1x_1-3x_2+5x_3=27$ $+7x_1-2x_2+4x_3=36$ $+2x_1-2x_2+1x_3=14$	71) $-7x_1-5x_2-3x_3=2$ $-1x_1+5x_2-7x_3=24$ $-4x_1-7x_2+4x_3=-17$	72) $+5x_1-4x_2-4x_3=-15$ $+2x_1+2x_2-6x_3=-28$ $-2x_1-2x_2-7x_3=-37$
73) $-4x_1+1x_2-7x_3=17$ $+0x_1+1x_2-2x_3=7$ $+3x_1-4x_2-4x_3=-4$	74) $-1x_1+5x_2+1x_3=-1$ $-3x_1-6x_2+2x_3=-7$ $+3x_1-2x_2+2x_3=23$	75) $-5x_1+0x_2-7x_3=-55$ $+5x_1-3x_2-1x_3=24$ $-7x_1+2x_2+7x_3=1$
76) $+7x_1+3x_2+3x_3=5$ $-5x_1+7x_2+3x_3=37$ $-6x_1-5x_2-3x_3=-16$	77) $+3x_1+5x_2-6x_3=-23$ $+5x_1-4x_2-6x_3=-18$ $-6x_1+2x_2-1x_3=8$	78) $-4x_1-3x_2-6x_3=6$ $+7x_1+4x_2-1x_3=1$ $-1x_1+5x_2-1x_3=1$
79) $-4x_1-6x_2+4x_3=-10$ $-3x_1-1x_2+7x_3=12$ $+0x_1+5x_2-2x_3=-3$	80) $+2x_1-2x_2+7x_3=15$ $-3x_1-4x_2+4x_3=-1$ $-6x_1+6x_2+2x_3=-22$	81) $+5x_1-5x_2+4x_3=-6$ $+1x_1-6x_2-7x_3=-9$ $+7x_1-7x_2+2x_3=-12$
82) $+6x_1-5x_2+5x_3=-32$ $-4x_1-7x_2+6x_3=-21$ $+3x_1-7x_2-7x_3=-48$	83) $-5x_1-3x_2+4x_3=10$ $-4x_1-2x_2+6x_3=4$ $-1x_1+1x_2-5x_3=3$	84) $+2x_1-2x_2+2x_3=10$ $+3x_1-5x_2-7x_3=27$ $-5x_1+7x_2-5x_3=-27$
85) $+4x_1+4x_2-2x_3=-26$ $+1x_1-6x_2-3x_3=-12$ $+3x_1-1x_2+1x_3=-3$	86) $-7x_1+5x_2-6x_3=-55$ $-3x_1+6x_2-7x_3=-44$ $+0x_1+6x_2-1x_3=-20$	87) $+0x_1+4x_2-1x_3=-8$ $-5x_1+3x_2+3x_3=-1$ $+0x_1+7x_2+5x_3=13$
88) $+4x_1-2x_2-6x_3=36$ $-6x_1+3x_2-3x_3=-30$ $+2x_1+1x_2+1x_3=6$	89) $+3x_1+5x_2-3x_3=-20$ $+4x_1-2x_2+1x_3=2$ $+0x_1+0x_2+1x_3=4$	90) $-4x_1-5x_2-5x_3=-6$ $-5x_1+0x_2+7x_3=40$ $-3x_1+3x_2-4x_3=-26$
91) $-3x_1+3x_2+7x_3=38$ $-2x_1-1x_2+3x_3=20$ $+6x_1+4x_2-1x_3=-21$	92) $-7x_1-3x_2+3x_3=-11$ $-3x_1-5x_2-3x_3=-33$ $+6x_1-7x_2+4x_3=7$	93) $-1x_1+4x_2-5x_3=-26$ $-3x_1-6x_2-3x_3=-36$ $-5x_1+6x_2-5x_3=-44$
94) $-1x_1+4x_2+3x_3=19$ $-5x_1+2x_2+7x_3=25$ $+1x_1-2x_2-3x_3=-13$	95) $-5x_1+7x_2+5x_3=13$ $-6x_1-1x_2-6x_3=-10$ $+4x_1-1x_2-7x_3=11$	96) $-3x_1+2x_2-2x_3=11$ $+2x_1+2x_2-5x_3=9$ $+7x_1+4x_2+7x_3=-2$
97) $+7x_1+7x_2+5x_3=-7$ $-5x_1+6x_2-6x_3=16$ $+3x_1+7x_2-1x_3=1$	98) $+1x_1-7x_2-2x_3=-18$ $-6x_1-4x_2-6x_3=-12$ $-4x_1+4x_2+7x_3=1$	99) $-6x_1-2x_2-4x_3=-28$ $-3x_1+2x_2-1x_3=-22$ $-1x_1-1x_2+2x_3=0$
100) $-7x_1+2x_2-5x_3=-16$ $-1x_1+7x_2+1x_3=1$ $-3x_1+6x_2+5x_3=-16$	101) $+6x_1+0x_2+7x_3=-33$ $+7x_1+5x_2-3x_3=5$ $-1x_1+3x_2-3x_3=17$	102) $+6x_1-7x_2+0x_3=-9$ $-6x_1-6x_2-2x_3=-30$ $+7x_1+7x_2+1x_3=35$
103) $+1x_1-5x_2+3x_3=-5$ $+1x_1+5x_2+1x_3=27$ $-2x_1+2x_2-5x_3=-18$	104) $+2x_1-3x_2-1x_3=2$ $-6x_1-6x_2+7x_3=-3$ $+6x_1+1x_2-5x_3=2$	105) $-1x_1-3x_2+2x_3=13$ $+7x_1+3x_2-7x_3=-38$ $-2x_1+1x_2-4x_3=-21$
106) $+3x_1+7x_2+0x_3=-7$ $+5x_1-7x_2-6x_3=1$ $-4x_1-2x_2+4x_3=6$	107) $+7x_1+2x_2+5x_3=0$ $-3x_1+5x_2+1x_3=-18$ $+1x_1-7x_2+6x_3=4$	108) $+2x_1-6x_2+7x_3=-4$ $+6x_1+5x_2+7x_3=34$ $+5x_1-2x_2-1x_3=16$
109) $-5x_1+3x_2-6x_3=-30$ $-3x_1+1x_2-2x_3=-10$ $+1x_1-3x_2-4x_3=-20$	110) $-2x_1-2x_2+7x_3=38$ $-4x_1-4x_2+2x_3=28$ $+6x_1-1x_2+1x_3=-5$	111) $+0x_1-1x_2-2x_3=0$ $+7x_1+1x_2-3x_3=-19$ $-2x_1+5x_2+3x_3=-3$

112) $-6x_1-5x_2+0x_3=-22$ $+3x_1+4x_2-7x_3=-21$ $+1x_1+7x_2+4x_3=36$	113) $+0x_1+0x_2-2x_3=-6$ $+5x_1+6x_2+2x_3=31$ $-5x_1+6x_2+7x_3=-4$	114) $+1x_1-2x_2+0x_3=-1$ $+3x_1+0x_2-7x_3=17$ $+6x_1-3x_2-1x_3=5$
115) $+1x_1-4x_2+0x_3=4$ $-7x_1+1x_2-1x_3=-27$ $-4x_1+2x_2-3x_3=-13$	116) $-6x_1+5x_2-2x_3=47$ $-4x_1-2x_2+6x_3=-10$ $-4x_1-6x_2-3x_3=-12$	117) $-4x_1+2x_2-5x_3=-4$ $+0x_1-4x_2-6x_3=-16$ $-5x_1-5x_2-7x_3=-14$
118) $+3x_1-1x_2-3x_3=20$ $+7x_1+0x_2-5x_3=43$ $-5x_1-5x_2+2x_3=-31$	119) $+3x_1+5x_2-2x_3=-22$ $+3x_1+2x_2+6x_3=-21$ $-4x_1+6x_2+5x_3=-11$	120) $-4x_1-6x_2+1x_3=7$ $-3x_1+2x_2-7x_3=-40$ $-6x_1+1x_2+1x_3=-2$

1.5.3.2. Розв'язати за допомогою інтелектуального тренажера систему чотирьох лінійних рівнянь трьома методами (методом Крамера, матричним методом та методом Гаусса) та внести відповідні коментарі до покрокового розв'язку.

$$\{1.\},\begin{cases} x_1+x_4=6 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+4x_4=8 \\ 3x_1+4x_2-x_3=-7 \\ 4x_1-3x_2-3x_3+6x_4=34 \end{cases},\ \{2.\},\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3+6x_4=-49 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=-16 \\ -x_1+x_2+2x_3+3x_4=-13 \\ 2x_1-3x_2-2x_3+6x_4=-22 \end{cases}$$

$$\{3.\},\begin{cases} -x_1+6x_2-3x_3+x_4=-11 \\ 3x_1-x_2-3x_3-2x_4=-2 \\ 5x_1-x_2+4x_3+6x_4=70 \\ -2x_2-x_3+5x_4=30 \end{cases},\ \{4.\},\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_4=-44 \\ -x_1+6x_2-2x_3+5x_4=-35 \\ x_1+6x_2-3x_3-x_4=-24 \\ -2x_1-2x_2+5x_4=2 \end{cases}$$

$$\{5.\},\begin{cases} -2x_1+3x_2+4x_3=-51 \\ 4x_1+4x_2-2x_3+3x_4=43 \\ -3x_1+4x_2-x_3+2x_4=-47 \\ 6x_1-2x_2+x_3+5x_4=94 \end{cases},\ \{6.\},\begin{cases} 2x_1+6x_2-3x_3+5x_4=2 \\ x_2-2x_3=4 \\ 3x_1+x_2+2x_3+5x_4=-10 \\ 4x_1-x_2+2x_3+4x_4=-12 \end{cases}$$

$$\{7.\},\begin{cases} 6x_1-x_2+x_3=23 \\ 6x_1-x_2-x_3-3x_4=18 \\ -x_1-x_2+5x_3-2x_4=-3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=13 \end{cases},\ \{8.\},\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+4x_4=48 \\ x_1+6x_2-x_3+4x_4=55 \\ 5x_1+6x_2-3x_3+x_4=17 \\ 4x_3+3x_4=32 \end{cases}$$

$$\{9.\},\begin{cases} 5x_1+5x_2-3x_3-x_4=30 \\ -3x_1+4x_2-x_3+2x_4=-11 \\ x_1+4x_2+4x_4=0 \\ -2x_1+4x_3+3x_4=-3 \end{cases},\ \{10.\},\begin{cases} -x_1-x_2+x_3+4x_4=21 \\ 2x_1+x_2-x_4=-3 \\ -3x_1+x_2+2x_3-2x_4=5 \\ 6x_1+5x_3+3x_4=16 \end{cases}$$

$$\{11.\},\begin{cases}4x_1+2x_2+4x_3-x_4=4\\-2x_1-x_2+6x_4=-32\\3x_1-x_2+5x_3+x_4=-32\\4x_1+x_2+6x_3+2x_4=-24\end{cases},\quad \{12.\},\begin{cases}-2x_1+5x_2-2x_3+3x_4=27\\4x_1+6x_2+3x_4=29\\-x_1+6x_2-2x_3+4x_4=34\\2x_1+x_2-3x_3+2x_4=30\end{cases}$$

$$\{13.\},\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-2x_4=4\\-x_1+4x_2+x_3=-5\\5x_1+3x_2-3x_4=0\\2x_2-2x_3+x_4=0\end{cases},\quad \{14.\},\begin{cases}6x_1+x_2+5x_3+3x_4=45\\5x_1+x_2+x_3-2x_4=22\\x_1+x_2+3x_3=6\\-2x_1+2x_2-x_3+x_4=-32\end{cases}$$

$$\{15.\},\begin{cases}x_1+5x_2-2x_3-2x_4=-50\\-x_2+x_3+5x_4=27\\-3x_1-2x_2+5x_3+3x_4=81\\6x_1+2x_2+x_4=-53\end{cases},\quad \{16.\},\begin{cases}5x_1-2x_2+x_3+2x_4=94\\6x_1+6x_2+2x_3+2x_4=62\\3x_1+6x_2-2x_3+6x_4=-34\\4x_1+3x_2+x_3=51\end{cases}$$

$$\{17.\},\begin{cases}-x_1+x_2+5x_3-3x_4=-8\\x_1+3x_2+2x_3-x_4=-9\\-x_1+3x_2+x_3-x_4=-4\\2x_1+3x_2+2x_3=-7\end{cases},\quad \{18.\},\begin{cases}3x_1+4x_2-2x_3+2x_4=15\\-3x_1+x_2+2x_3-3x_4=-22\\5x_1+x_2+3x_3+2x_4=-4\\4x_2+2x_3-x_4=-19\end{cases}$$

$$\{19.\},\begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_3-3x_4=-22\\3x_1-2x_2+3x_3+4x_4=-39\\x_1-2x_2+6x_3+5x_4=-62\\-2x_1+4x_2+3x_3-x_4=-23\end{cases},\quad \{20.\},\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3+x_4=-20\\-2x_1+6x_2+3x_3+x_4=-16\\-3x_1+6x_2-2x_3-x_4=15\\6x_1+4x_2+4x_3-x_4=17\end{cases}$$

$$\{21.\},\begin{cases}6x_1+4x_2-x_3+6x_4=13\\4x_1+3x_2+3x_3-2x_4=8\\3x_1+3x_2+x_3+2x_4=12\\4x_1+5x_2+5x_3-2x_4=20\end{cases},\quad \{22.\},\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3+x_4=-23\\-x_1+x_2+4x_3+6x_4=36\\-x_1+x_2+4x_3+5x_4=33\\2x_1+5x_2+6x_3-2x_4=56\end{cases}$$

$$\{23.\},\begin{cases}5x_1+6x_3+6x_4=4\\5x_1-2x_2+4x_3+3x_4=3\\5x_1-2x_2+6x_3-2x_4=22\\6x_2-3x_3-3x_4=21\end{cases},\quad \{24.\},\begin{cases}-x_1+4x_2-x_3=19\\x_1+6x_2+4x_3=21\\2x_1+5x_2-x_3+x_4=18\\-2x_1+6x_2-2x_3-3x_4=18\end{cases}$$

$$\{25.\},\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3+5x_4=-1\\6x_1+3x_2+5x_3-3x_4=39\\-2x_1+3x_2+x_3+4x_4=-19\\6x_1+6x_2-x_3-3x_4=63\end{cases},\quad \{26.\},\begin{cases}-2x_1+6x_3=0\\2x_1+x_2+5x_3+4x_4=10\\4x_1+4x_3-3x_4=-81\\4x_1-3x_2-x_3+6x_4=36\end{cases}$$

$$\{27.\},\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+5x_4=-30\\-3x_1-2x_2+5x_3+2x_4=-9\\-2x_2-3x_3=13\\2x_1-3x_2+6x_4=-5\end{cases},\{28.\},\begin{cases}6x_1+6x_2+3x_3-x_4=-83\\3x_1+6x_2+5x_3-x_4=-68\\6x_1+5x_2-x_3+3x_4=-75\\-3x_2+x_3+5x_4=49\end{cases}$$

$$\{29.\},\begin{cases}6x_3+4x_4=44\\-2x_1+3x_2+6x_3+6x_4=26\\2x_1+3x_2+2x_3+6x_4=22\\-2x_1-2x_2+2x_3+5x_4=20\end{cases},\{30.\},\begin{cases}5x_1+3x_2-x_4=-32\\4x_1+x_2+6x_3+3x_4=-6\\-2x_1+4x_3=24\\6x_1-2x_2+3x_3+5x_4=-17\end{cases}$$

$$\{31.\},\begin{cases}-x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5\\-2x_2+6x_3+x_4=-3\\4x_1-2x_2-3x_3+3x_4=28\\4x_1-x_2+4x_3+4x_4=24\end{cases},\{32.\},\begin{cases}3x_1-x_2+6x_3-2x_4=-33\\5x_1+5x_2-3x_3-2x_4=22\\5x_2+6x_4=4\\2x_1-x_2+5x_3+4x_4=-33\end{cases}$$

$$\{33.\},\begin{cases}-2x_1+2x_2+3x_4=39\\x_1+3x_2-3x_3+5x_4=78\\6x_1+3x_2+2x_3-x_4=-1\\-x_2+6x_3+3x_4=-9\end{cases},\{34.\},\begin{cases}2x_1+6x_2+3x_3-2x_4=32\\6x_1-3x_3+2x_4=10\\2x_1+5x_3+2x_4=-2\\-2x_1-3x_3+3x_4=-18\end{cases}$$

$$\{35.\},\begin{cases}6x_1-x_2-3x_3+2x_4=-44\\2x_1-2x_2-2x_3=-32\\-2x_1-3x_2-3x_3+5x_4=-18\\6x_1-3x_3+3x_4=-36\end{cases},\{36.\},\begin{cases}2x_2-3x_4=10\\-2x_1+5x_2-2x_3-3x_4=0\\4x_1+5x_2-2x_4=68\\3x_1+x_2-2x_3+2x_4=18\end{cases}$$

$$\{37.\},\begin{cases}5x_1+5x_2+4x_3+2x_4=-24\\3x_1+3x_2-2x_3+4x_4=-42\\2x_2+3x_3+x_4=17\\x_1+x_2-x_3+2x_4=-17\end{cases},\{38.\},\begin{cases}-x_1-x_2-3x_3-3x_4=3\\-x_1-x_3+x_4=3\\6x_1+5x_3+4x_4=6\\-x_1+x_2+x_4=-1\end{cases}$$

$$\{39.\},\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+x_4=-40\\4x_1-2x_2-x_3-2x_4=30\\2x_1-3x_2-2x_3-3x_4=62\\-3x_1+2x_2+x_3+x_4=-22\end{cases},\{40.\},\begin{cases}-3x_1+5x_2+4x_3+6x_4=-18\\5x_2-x_3+6x_4=42\\-2x_1+5x_2+x_4=-17\\5x_1+2x_2+2x_3+x_4=9\end{cases}$$

$$\{41.\},\begin{cases}2x_1-2x_2-3x_3+x_4=-3\\5x_1+3x_2+3x_4=-50\\4x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-41\\3x_1+3x_2+3x_3=-27\end{cases},\{42.\},\begin{cases}6x_1+x_2+x_3+6x_4=28\\x_1=4\\6x_3-3x_4=6\\x_1+3x_2+4x_3=-18\end{cases}$$

$$\{43.\},\begin{cases} 5x_2+4x_3=2 \\ -3x_1-2x_2-3x_4=1 \\ 6x_1-3x_2-2x_3=0 \\ -x_1+3x_2+5x_3=9 \end{cases},\ \{44.\},\begin{cases} 5x_1-2x_2-2x_3+5x_4=-7 \\ 2x_1+5x_2+x_3+5x_4=-4 \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=-2 \\ -3x_1+4x_2+5x_3-x_4=6 \end{cases}$$

$$\{45.\},\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=-3 \\ -2x_1+3x_2+x_3+2x_4=30 \\ -2x_1+2x_2+3x_3+6x_4=95 \\ 5x_1+4x_2+6x_3-x_4=-4 \end{cases},\ \{46.\},\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+5x_4=-56 \\ 3x_1+x_3-x_4=-6 \\ 4x_1-x_2+6x_3-x_4=-29 \\ 3x_1+5x_2-3x_3-2x_4=35 \end{cases}$$

$$\{47.\},\begin{cases} -3x_1-3x_2-2x_3-x_4=-54 \\ -x_1-3x_2+2x_3+6x_4=3 \\ x_1-3x_2-x_3+2x_4=-3 \\ x_1+5x_2-2x_3-2x_4=43 \end{cases},\ \{48.\},\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+4x_4=-35 \\ 5x_1+5x_2+2x_3+4x_4=-65 \\ -3x_1+4x_2+x_3+5x_4=33 \\ -x_1+5x_2-x_3-2x_4=28 \end{cases}$$

$$\{49.\},\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3-x_4=63 \\ 2x_2+2x_3+x_4=20 \\ 3x_1+2x_2+4x_3-2x_4=36 \\ -3x_1+6x_2-3x_4=6 \end{cases},\ \{50.\},\begin{cases} -3x_2-2x_3+4x_4=-12 \\ 6x_1+3x_3-2x_4=-11 \\ -x_1-x_2+6x_3+2x_4=34 \\ 5x_1+6x_2+x_3-3x_4=-6 \end{cases}$$

$$\{51.\},\begin{cases} 4x_1+2x_3-2x_4=26 \\ x_1-3x_2+3x_3+5x_4=6 \\ 5x_1-3x_2-x_3+5x_4=18 \\ 3x_1+6x_2+2x_3+6x_4=13 \end{cases},\ \{52.\},\begin{cases} -x_1+3x_2+5x_3+3x_4=2 \\ -3x_1+5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ x_1+4x_2+2x_3-2x_4=-48 \\ x_1-3x_2+2x_3+6x_4=60 \end{cases}$$

$$\{53.\},\begin{cases} 3x_1-3x_2-x_3-2x_4=61 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=-28 \\ -3x_1+2x_2+4x_3+x_4=-62 \\ -x_1-3x_2+3x_3+6x_4=-43 \end{cases},\ \{54.\},\begin{cases} -3x_1+2x_3+3x_4=15 \\ -2x_1+4x_3-3x_4=-33 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=40 \\ -3x_1-2x_2+4x_3+5x_4=29 \end{cases}$$

$$\{55.\},\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-3x_4=10 \\ 4x_1-3x_2+4x_3+4x_4=8 \\ -x_1-3x_2-x_3-3x_4=19 \\ 5x_1-2x_2+5x_3+5x_4=3 \end{cases},\ \{56.\},\begin{cases} 6x_1+6x_2-x_3+2x_4=2 \\ -x_1+5x_2+4x_3+x_4=15 \\ 5x_1+4x_2+2x_3=24 \\ 3x_1-2x_2+6x_3+4x_4=74 \end{cases}$$

$$\{57.\},\begin{cases} 2x_3-3x_4=13 \\ 5x_1+2x_2+5x_3-x_4=16 \\ x_1+x_2+5x_3+3x_4=39 \\ x_1-x_2-3x_3+4x_4=-26 \end{cases},\ \{58.\},\begin{cases} 4x_1+3x_2+6x_3+2x_4=43 \\ 5x_3+6x_4=-37 \\ -3x_1-x_2-3x_3+6x_4=-77 \\ -x_1-x_2-2x_3+4x_4=-44 \end{cases}$$

$$\{59.\},\begin{cases} -x_1+6x_2-x_3+6x_4=63 \\ 6x_1-3x_2+5x_3+3x_4=-25 \\ 3x_1+6x_2-x_4=-5 \\ -3x_1-x_3+3x_4=35 \end{cases},\ \{60.\},\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+x_4=-33 \\ 2x_1+5x_2+6x_3=-33 \\ -x_1+4x_2+2x_3+3x_4=-27 \\ 5x_1+3x_4=-1 \end{cases}$$

$$\{61.\},\begin{cases} -3x_1+2x_2+6x_3+6x_4=32 \\ -3x_1+2x_2+6x_3-2x_4=-16 \\ 5x_1+x_2+5x_3+6x_4=-2 \\ 3x_1+2x_4=0 \end{cases},\ \{62.\},\begin{cases} 2x_1+6x_2+x_4=13 \\ 3x_1-x_2+6x_3+5x_4=5 \\ x_1-x_2-2x_3-x_4=5 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$$

$$\{63.\},\begin{cases} 6x_1-x_2+3x_3+5x_4=-5 \\ -2x_1-3x_2-3x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+6x_2+2x_4=16 \\ -x_1+x_2+2x_3+2x_4=14 \end{cases},\ \{64.\},\begin{cases} 2x_2+6x_3=4 \\ 4x_1+4x_2-3x_3-x_4=-7 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+5x_4=7 \\ -3x_1+2x_2+3x_3+x_4=-13 \end{cases}$$

$$\{65.\},\begin{cases} 4x_1+5x_2+5x_4=-31 \\ -x_1+2x_2-3x_3+6x_4=-35 \\ -x_1+x_2+5x_3-2x_4=7 \\ 5x_1+2x_2+4x_3+x_4=-4 \end{cases},\ \{66.\},\begin{cases} -x_1-2x_2+3x_3=2 \\ 5x_1-x_2-2x_3+4x_4=34 \\ 5x_1-x_2-2x_3+x_4=13 \\ 3x_1+2x_2+5x_3=-28 \end{cases}$$

$$\{67.\},\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-19 \\ x_1-3x_2-2x_3+x_4=28 \\ x_1+6x_2+x_3+4x_4=-71 \\ x_1+3x_2+6x_3=-38 \end{cases},\ \{68.\},\begin{cases} -3x_1+5x_2-x_4=3 \\ 6x_1+4x_2-2x_3-2x_4=-52 \\ -3x_1+3x_2+3x_3-3x_4=-6 \\ -x_1+3x_2-3x_3=3 \end{cases}$$

$$\{69.\},\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+4x_4=19 \\ 2x_1+2x_2-x_3+5x_4=8 \\ 3x_1+x_2+6x_3=57 \\ -3x_1+4x_2-2x_3-x_4=-39 \end{cases},\ \{70.\},\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3-2x_4=-28 \\ -3x_1-x_2-x_3+3x_4=-1 \\ -2x_2-2x_3+4x_4=-16 \\ 5x_1+4x_2-2x_3-x_4=-7 \end{cases}$$

$$\{71.\},\begin{cases} 4x_2+3x_4=22 \\ 3x_1-3x_2-x_3=-4 \\ 6x_1+6x_2+x_3-3x_4=46 \\ 2x_1+4x_2-x_3-2x_4=16 \end{cases},\ \{72.\},\begin{cases} 4x_1-2x_2+4x_3-2x_4=-26 \\ -x_1+4x_2-3x_4=44 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ 5x_2-2x_4=43 \end{cases}$$

$$\{73.\},\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3+3x_4=45 \\ 4x_1+2x_2+4x_4=78 \\ -2x_1+x_2+6x_3+3x_4=-15 \\ -2x_1+5x_2+x_3-2x_4=45 \end{cases},\ \{74.\},\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3-3x_4=14 \\ -x_2+2x_4=-14 \\ 4x_1-2x_2-x_3+6x_4=-49 \\ 6x_1+5x_2+2x_3-3x_4=1 \end{cases}$$

$$\{75.\},\begin{cases} -3x_1-3x_2+4x_3+2x_4=-2 \\ 5x_1-3x_2+x_3-x_4=-9 \\ 6x_2+x_3-x_4=13 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-3x_4=7 \end{cases},\ \{76.\},\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-3x_4=-5 \\ x_1+4x_2+x_3+6x_4=-5 \\ 6x_1+3x_2+4x_3+2x_4=26 \\ 2x_1+6x_2+4x_3+6x_4=14 \end{cases}$$

$$\{77.\},\begin{cases} 6x_1+4x_2+x_3+2x_4=-7 \\ -3x_1+2x_2+x_3+3x_4=9 \\ 2x_1+x_2-3x_3+5x_4=-27 \\ -3x_2+5x_3+6x_4=60 \end{cases},\ \{78.\},\begin{cases} -3x_2+5x_3+6x_4=52 \\ 2x_1-x_2+2x_3=27 \\ -2x_1-2x_2-x_3-2x_4=-3 \\ -2x_1-3x_2+5x_3+6x_4=42 \end{cases}$$

$$\{79.\},\begin{cases} 4x_1-2x_3+x_4=-23 \\ -2x_1+6x_2+2x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+6x_2+2x_3+x_4=-51 \\ 6x_1-3x_2+6x_3+5x_4=-75 \end{cases},\ \{80.\},\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3+6x_4=-12 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+5x_4=33 \\ 3x_2+4x_3+5x_4=-22 \\ 4x_1-2x_2-3x_3+5x_4=120 \end{cases}$$

$$\{81.\},\begin{cases} 3x_1-3x_2+5x_3+x_4=-43 \\ -x_1+x_2+2x_3+2x_4=-28 \\ 6x_1-3x_3-2x_4=23 \\ 2x_1-2x_2-2x_3+5x_4=2 \end{cases},\ \{82.\},\begin{cases} -3x_1-2x_3+5x_4=3 \\ 4x_1-x_2+3x_3-x_4=18 \\ 2x_1-2x_2+x_4=12 \\ -x_2-x_3+4x_4=14 \end{cases}$$

$$\{83.\},\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=11 \\ 6x_2+3x_3-3x_4=33 \\ -2x_1+5x_2+2x_3+4x_4=30 \\ -2x_1-x_2+4x_4=2 \end{cases},\ \{84.\},\begin{cases} 6x_1+6x_2+5x_3+5x_4=136 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+4x_4=105 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-3x_4=54 \\ 6x_1-x_2+x_3+3x_4=44 \end{cases}$$

$$\{85.\},\begin{cases} -x_2-x_3=-5 \\ x_1+x_2+4x_3+x_4=5 \\ -3x_3=-3 \\ 4x_1+2x_3+3x_4=-11 \end{cases},\ \{86.\},\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+4x_4=11 \\ -3x_1-x_2+4x_3-2x_4=-8 \\ 6x_1-2x_2+3x_4=-17 \\ 2x_1+3x_3+3x_4=-10 \end{cases}$$

$$\{87.\},\begin{cases} -2x_1+6x_2+5x_3-x_4=26 \\ 2x_1+6x_2+4x_3+5x_4=63 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+6x_4=63 \\ x_2+3x_3+2x_4=9 \end{cases},\ \{88.\},\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3+4x_4=-21 \\ -2x_1+4x_2+5x_3+3x_4=-14 \\ -2x_1+3x_2+5x_3-x_4=1 \\ -2x_1+x_2+4x_3+2x_4=-11 \end{cases}$$

$$\{89.\},\begin{cases} -3x_1+2x_2+2x_3-x_4=-18 \\ 4x_1+x_2+5x_3=28 \\ 4x_1-2x_3+2x_4=22 \\ 6x_1+x_2+5x_3+x_4=41 \end{cases},\ \{90.\},\begin{cases} x_1+5x_2+6x_3+3x_4=-22 \\ -x_1-x_2+5x_3-3x_4=73 \\ -2x_2+6x_4=-76 \\ 4x_1+2x_2+6x_3+x_4=-17 \end{cases}$$

$$\{91.\},\begin{cases}5x_1-x_2-x_3-2x_4=-1\\5x_1+6x_2+6x_3+4x_4=36\\6x_1+5x_2+3x_3-x_4=2\\2x_1+2x_2-3x_3+x_4=-14\end{cases},\ \{92.\},\begin{cases}2x_2+3x_3+3x_4=-11\\4x_2+6x_3+2x_4=-22\\2x_1+2x_2+6x_3+2x_4=-14\\3x_2-2x_3=-23\end{cases}$$

$$\{93.\},\begin{cases}4x_1+5x_2+6x_3-2x_4=-5\\6x_1+x_2+6x_3-x_4=7\\-x_1-2x_3+5x_4=-7\\-2x_1+3x_2-x_3=-9\end{cases},\ \{94.\},\begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_4=20\\x_1-2x_2-3x_3+6x_4=39\\5x_1-3x_2+x_3-2x_4=-36\\6x_1+3x_2-x_4=-37\end{cases}$$

$$\{95.\},\begin{cases}3x_1+2x_2+3x_3-3x_4=24\\-3x_1+6x_2-3x_3+3x_4=0\\x_1+5x_2+3x_3+x_4=9\\4x_1+4x_2+x_3-x_4=36\end{cases},\ \{96.\},\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3+2x_4=49\\3x_1+3x_2-3x_3+x_4=-10\\-3x_1+2x_2+6x_3+4x_4=44\\2x_1+4x_2+x_3-x_4=5\end{cases}$$

$$\{97.\},\begin{cases}x_1-2x_2-3x_4=13\\-2x_1+x_2-2x_3-2x_4=2\\3x_1-x_3-3x_4=18\\4x_2+2x_3-2x_4=58\end{cases},\ \{98.\},\begin{cases}5x_1+x_2+3x_3+x_4=45\\4x_1-2x_2-2x_3+5x_4=-9\\-x_1-3x_2+x_3=-26\\-2x_1+5x_2+3x_3-2x_4=67\end{cases}$$

$$\{99.\},\begin{cases}4x_2-3x_3+6x_4=12\\-x_1+6x_2-2x_3+2x_4=20\\5x_1+5x_2+4x_3+3x_4=5\\6x_1+5x_2+4x_3-3x_4=3\end{cases},\ \{100.\},\begin{cases}4x_1-2x_2+x_4=16\\5x_1+3x_2-x_3-x_4=49\\x_1+2x_2+6x_3-3x_4=-30\\4x_1+6x_2+5x_3-3x_4=8\end{cases}$$

$$\{101.\},\begin{cases}-2x_1+x_2+4x_3+5x_4=-7\\x_1+x_2-x_3-3x_4=-11\\-3x_1-x_3=38\\2x_1+6x_2+6x_3-3x_4=-102\end{cases},\ \{102.\},\begin{cases}2x_1+4x_2-3x_3=13\\6x_1-2x_2-x_3+4x_4=19\\3x_1-3x_2+2x_3+3x_4=-1\\6x_2-3x_3+6x_4=-9\end{cases}$$

$$\{103.\},\begin{cases}-3x_1-3x_2+5x_4=97\\2x_1+6x_2+x_4=-28\\-x_1+4x_2+4x_3+6x_4=67\\-2x_1-3x_2-2x_3+6x_4=106\end{cases},\ \{104.\},\begin{cases}x_1+4x_3=18\\-3x_1+3x_2-2x_4=-7\\5x_1+2x_2-3x_3-x_4=26\\6x_1-3x_2-2x_3+5x_4=-2\end{cases}$$

$$\{105.\},\begin{cases}5x_1+4x_2-3x_3+4x_4=-31\\3x_1+x_2+6x_4=5\\x_1-x_2-x_3+2x_4=5\\4x_1-2x_2-x_3+5x_4=6\end{cases},\ \{106.\},\begin{cases}-3x_2+x_3-x_4=12\\-2x_1-2x_2+3x_4=-4\\-3x_1-3x_2+2x_3+5x_4=-6\\2x_1-2x_2+5x_4=20\end{cases}$$

{107.}, $\begin{cases} 4x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -16 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -10 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$, {108.}, $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 17 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

{109.}, $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -23 \\ 5x_1 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_4 = -2 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$, {110.}, $\begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 21 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -26 \\ 3x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 40 \end{cases}$

{111.}, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 90 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 19 \end{cases}$, {112.}, $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -17 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 31 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -15 \\ -x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 43 \end{cases}$

{113.}, $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -14 \\ -2x_1 + 3x_3 + 3x_4 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 3x_4 = -4 \\ -3x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -20 \end{cases}$, {114.}, $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -29 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -44 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

{115.}, $\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -66 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -65 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -45 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 14 \end{cases}$, {116.}, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 27 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -87 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -55 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -24 \end{cases}$

{117.}, $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -30 \\ 4x_3 + 2x_4 = 46 \\ 4x_1 - x_2 - x_4 = 22 \\ -x_1 + 2x_2 = -20 \end{cases}$, {118.}, $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -18 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 36 \\ 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 15 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

{119.}, $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 25 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 40 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$, {120.}, $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 6 \\ -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -20 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

1.6. Власні числа і вектори матриці

Нехай дано вектор **X**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

де

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0,$$

Якщо після перетворення вектора **X** за допомогою матриці A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Отримуємо вектор **Y**:

$$\mathbf{Y} = A \cdot \mathbf{X} \qquad (1.1)$$

паралельний вектору **X**:

$$\mathbf{Y} = \lambda \cdot \mathbf{X}, \qquad (1.2)$$

де λ - число, то вектор **X** називається *власним вектором* матриці A; число λ - називається власним значенням.

Для знаходження *власного вектора* **X** необхідно прирівняти праві частини рівностей (1.1), (1.2)

$$A \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{X}. \qquad (1.3)$$

Права частина рівності (1.3) не зміниться, якщо вектор **X** помножити зліва на одничну матрицю третього порядку

$$A \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot E \cdot \mathbf{X}. \qquad (1.4)$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$\left(A - \lambda \cdot E\right) \cdot \mathbf{X} = 0, \qquad (1.5)$$

Звідки випливає, що вектор **X** може бути визначений з точністю до сталого множника.

Запишемо рівності (1.4) і (1.5) в розгорнутому вигляді, отримаємо

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = \lambda x_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = \lambda x_2,$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = \lambda x_3$$

$$(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$

$$a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0\,. \qquad (1.6)$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0$$

Останні рівності є системою трьох лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих координат x_1, x_2, x_3 вектора **X**. Однорідна система завжди має, принаймні один розв'язок – нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1=0, x_2=0, x_3=0$. У випадку коли число рівнянь системи співпадає з числом невідомих необхідна та достатня умова існування нетривіального розв'язку полягає в рівності нулю визначника системи

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0\,, \qquad (1.7)$$

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням квадратної матриці A*. Його степінь відносно невідомої змінної λ дорівнює порядку матриці. Розв'язки цього рівняння називають *власними* (*характеристичними*) числами квадратної матриці *A*.

Рівняння (1.7) є кубічним рівнянням відносно невідомої λ

```
linalg[det](A-lambda*E):
collect(%,lambda);
```

$$-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$$
$$+(a_{21}a_{12}-a_{11}a_{33}+a_{31}a_{13}-a_{22}a_{33}-a_{11}a_{22}+a_{23}a_{32})\lambda$$
$$+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{31}a_{13}a_{22}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{13}a_{32}$$

Серед коренів такого рівняння може бути тільки два випадки: 1) один дійсний та два комплексно спряжені корені; 2) три дійсних корені. В першу чергу нас цікавитиме випадок дійсних коренів і, зокрема, випадок трьох різних дійсних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Кожному власному значенню $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ відповідає власний вектор $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, що утворюють трійку лінійно незалежних векторів. Координати цих векторів є розв'язками системи (1.6) при відповідному значенні

власного числа λ_i, i=1, 2, 3.

Визначення власних значень та власних векторів матриць є складовою методу аналізу ієрархій теорії прийняття рішень, що широко використовується під час розв'язання широкого кола сучасних прикладних задач.

Приклад 6.1. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Складемо характеристичне рівняння заданої матриці та знайдемо його корені

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 6\\ 4 & 3-\lambda\end{bmatrix}=0,\quad \Rightarrow\quad \lambda^2-4\cdot\lambda-21=0,\quad \lambda_1=-3,\quad \lambda_2=7.$$

Визначимо власний вектор w_1, що відповідає власному значенню $\lambda_1=-3$. Система (1.6) у цьому випадку матиме такий вигляд

$$\begin{cases}(1-\lambda_1)\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 0\\ 4\cdot x_1 + (3-\lambda_1)\cdot x_2 \quad 6\cdot x_2\end{cases}.$$

$$\begin{cases}(1-\lambda_1)\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 0\\ 4\cdot x_1 + (3-\lambda_1)\cdot x_2 = 0\end{cases},$$

або з урахуванням $\lambda_1=-3$

$$\begin{cases}4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 0\\ 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 = 0\end{cases}.$$

Оскільки матриця $A-\lambda_1\cdot E$ - вироджена, ми отримали лінійно залежну систему з двох рівнянь, тобто незалежним є тільки одне рівняння, що очевидно в цьому випадку.

Для розв'язання одного рівняння з двома невідомими, надамо одній із змінних, наприклад, x_1 довільного значення c, тобто $x_1=c, x_2=-\frac{2}{3}\cdot c$.

Власний вектор дорівнюватиме

$$\mathbf{X}_1 = c \cdot \mathbf{i} - \frac{2}{3} \cdot c \cdot \mathbf{j}.$$

Для власного значення $\lambda_2 = 7$. Система (1.6) набуває вигляду

$$\begin{cases} -6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 0 \\ 4 \cdot x_1 + -4 \cdot x_2 = 0 \end{cases}.$$

Очевидно, що і в цьому випадку маємо тільки одне незалежне рівняння, на основі розв'язку якого отримуємо відповідний власний вектор

$$\mathbf{X}_2 = c \cdot \mathbf{i} + c \cdot \mathbf{j}.$$

◄

Приклад 6.2. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Розв'язування.

Запишемо рівняння (1.7)

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

та обчислимо відповідний визначник, отримаємо

$$\lambda^3 - 18 \cdot \lambda^2 + 99 \cdot \lambda - 162 = 0.$$

Коренями цього рівняння є дійсні різні числа $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_2 = 9$. Слід зазначити, що вихідна матриця – симетрична і власні числа таких матриць завжди є дійсні різні числа.

Визначимо власні вектори.

Для $\lambda_1 = 3$ система (1.6) набуває вигляду системи трьох лінійно залежних рівнянь

$$\begin{cases} 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = 0 \\ -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = 0 \\ -2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 0 \end{cases}.$$

Третє рівняння є сумою перших двох рівнянь, що помножені відповідно на –(1/2) та (-1).

Покладемо $x_1 = c$, тоді на основі розв'язку перших двох рівнянь отримаємо

$$\mathbf{X}_1 = c\cdot\mathbf{i} + 2\cdot c\cdot\mathbf{j} + 2\cdot c\cdot\mathbf{k}.$$

Аналогічно для $\lambda_1 = 6$ отримаємо

$$\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 = 0 \\ -2\cdot x_1 - 2\cdot x_3 = 0, \\ -2\cdot x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_2 = 2\cdot c\cdot\mathbf{i} + c\cdot\mathbf{j} - 2\cdot c\cdot\mathbf{k},$$

а для $\lambda_3 = 9$

$$\begin{cases} -2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = 0 \\ -2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - 2\cdot x_3 = 0, \\ -2\cdot x_2 - 4\cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_3 = 2\cdot c\cdot\mathbf{i} - 2\cdot c\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k}.$$

◀

1.6.1. Застосування СКМ до знаходження власних чисел та власних векторів матриці

Власні числа та відповідні власні вектори матриці A можемо знайти за допомогою стандартних команд системи: Eigenvalues(A) та Eigenvectors(A).

Розглянемо результати застосування цих команд, що знаходяться в пакеті LinearAlgebra.

```
restart; with(LinearAlgebra):
printf(`Вихідна матриця`); A:=Matrix(3,3,[[3, -6, 9],
[1, -2, 3], [-3, 6, -9]]);
```

Вихідна матриця

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

```
lambda:=Eigenvalues(A);
Eigenvectors(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Розглянемо застосування СКМ Maple до висвітлення в автоматизованому вигляді покрокового ходу розв'язування задачі на знаходження власних чисел та відповідних власних векторів квадратної матриці. З

Для висвітлення в автоматизованому вигляді покрокового ходу розв'язування задачі на знаходження власних чисел та відповідних власних векторів квадратної матриці було створено процедуру `ВласніЧислаТаВектори`:

```
 restart; with(LinearAlgebra):
`ВласніЧислаТаВектори`:=proc(AA::Matrix)
  local A,`Власні
числа_A`,n,`Null_Vector`,XX,AX,iB,BX,i,j,`Власне
число_j`,XW,B,Cons;
  printf(`Знайдемо власні вектори та відповідні власні
вектори матриці`);print(A=AA);
  printf(`Складаємо характеристичну матрицю `);
  print(Add(AA, -lambda));
  printf(`обчислюємо її детермінант та запишемо
характеристичне рівняння`);
  p(lambda):=Determinant(Add(AA, -
lambda));print(p(lambda)=0);
  print(`Визначенням коренів отриманого рівняння
знаходимо власні числа матриці`);
  [solve(lambda^2-lambda^3+lambda+2 = 0, lambda)];
  `Власні числа_A`:=sort(remove(has,%,
I));print(`Власні числа`=`Власні числа_A`[]);
  n:=Dimension(AA)[1];
  printf(`Створюємо нульовий вектор вільних членів та
стовпець невідомих`);
  0$ n:
  Null_Vector:=<%>;print(`Null Vector`=Null_Vector);
  x[k]$ k=1..n:
  XX:=<%>;print(X=XX);
```

```
  printf(`Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь
для визначення координат власного вектора`);
  AX:=Add(AA, -lambda).XX:
  for i in AX do print(i=0) end do;
  j:=1:
  for `Власне число_j` in sort([{`Власні
числа_A`[]}[]]) do
   printf(`Для власного значення`);
   lambda[j]=`Власне число_j`;print(%);
   printf(`система лінійних однорідних рівнянь для
визначення координат власного вектора має вигляд`);
   B[j]:=subs(lambda=`Власне число_j`,Add(AA, -
lambda)):
   BX:=B[j].XX:
   for i in BX do print(i=0) end do;
   printf(`Знайдемо нетривіальний розв'язок системи`);
   XW[j]:=LinearSolve(B[j],
Null_Vector);print(evaln(X)[j]=%);
   printf(`Тут через`);
   Cons:=sort([indets(%)[]])[]; print(%);
   if nops([Cons])=1 then
    printf(`позначено довільну сталу.\n`)
   else
    printf(`позначено довільні сталі.\n`)
   end if;
   j:=j+1:<`Власні числа_A`[]>,seq(XW[k],k=1..j-1)
  end do;
end proc:
```

Приклад 6.3. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці з використанням процедури **`ВласніЧислаТаВектори`**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

```
A:=<<1,4>|<6,3>>:
`ВласніЧислаТаВектори`(A):
```

Знайдемо власні вектори та відповідні власні вектори матриці

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичну матрицю

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

обчислюємо її детермінант та запишемо характеристичне рівняння

$$-21 - 4\lambda + \lambda^2 = 0$$

Визначенням коренів отриманого рівняння знаходимо власні числа матриці
Власні числа:

$$-3, 7$$

Створюємо нульовий вектор вільних членів та стовпець невідомих

$$Null\ Vector = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора

$$(1-\lambda)\, x_1 + 6\, x_2 = 0$$

$$4\, x_1 + (3-\lambda)\, x_2 = 0$$

Для власного значення

$$\lambda_1 = -3$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$4\, x_1 + 6\, x_2 = 0$$

$$4\, x_1 + 6\, x_2 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - t_2 \\ -t_2 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$-t_2$$

позначено довільну сталу.
Для власного значення

$$\lambda_2 = 7$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$-6x_1 + 6x_2 = 0$$

$$4x_1 - 4x_2 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_2 = \begin{bmatrix} _t0_2 \\ _t0_2 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t0_2$$

позначено довільну сталу.

◀

Приклад 6.4. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці з використанням процедури **`ВласніЧислаТаВектори`**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

```
A:=Matrix(3,3,[[3, -6, 9], [1, -2, 3], [-3, 6, -9]]):
`ВласніЧислаТаВектори`(A):
```

Знайдемо власні вектори та відповідні власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичну матрицю

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -6 & 9 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & 6 & -9-\lambda \end{bmatrix}$$

обчислюємо її детермінант та запишемо характеристичне рівняння

$$-8\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Визначенням коренів отриманого рівняння знаходимо власні числа матриці

Власні числа:

$$-8, 0, 0$$

Створюємо нульовий вектор вільних членів та стовпець невідомих

$$Null\ Vector = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора

$$(3-\lambda)\,x_1 - 6\,x_2 + 9\,x_3 = 0$$

$$x_1 + (-2-\lambda)\,x_2 + 3\,x_3 = 0$$

$$-3\,x_1 + 6\,x_2 + (-9-\lambda)\,x_3 = 0$$

Для власного значення

$$\lambda_1 = -8$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$11\,x_1 - 6\,x_2 + 9\,x_3 = 0$$

$$x_1 + 6\,x_2 + 3\,x_3 = 0$$

$$-3\,x_1 + 6\,x_2 - x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3\,_t1_2 \\ _t1_2 \\ -3\,_t1_2 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t1_2$$

позначено довільну сталу.

Для власного значення

$$\lambda_2 = 0$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$3\,x_1 - 6\,x_2 + 9\,x_3 = 0$$

$$x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2_t2_2 - 3_t2_3 \\ _t2_2 \\ _t2_3 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t2_2, _t2_3$$

позначено довільні сталі.

◀

Приклад 6.5. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці з використанням процедури **`ВласніЧислаТаВектори`**

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

```
A:=<<7,-2,0>|<-2,6,-2>|<0,-2,5>>:
`ВласніЧислаТаВектори`(A);
```

Знайдемо власні вектори та відповідні власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичну матрицю

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

обчислюємо її детермінант та запишемо характеристичне рівняння

$$162 - 99\lambda + 18\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Визначенням коренів отриманого рівняння знаходимо власні числа матриці

Власні числа:

$$3, 6, 9$$

Створюємо нульовий вектор вільних членів та стовпець невідомих

$$Null\ Vector = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора

$$(7-\lambda)\,x_1 - 2\,x_2 = 0$$

$$-2\,x_1 + (6-\lambda)\,x_2 - 2\,x_3 = 0$$

$$-2\,x_2 + (5-\lambda)\,x_3 = 0$$

Для власного значення

$$\lambda_1 = 3$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$4\,x_1 - 2\,x_2 = 0$$

$$-2\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 = 0$$

$$-2\,x_2 + 2\,x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_1 = \begin{bmatrix} _t3_1 \\ 2\,_t3_1 \\ 2\,_t3_1 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t3_1$$

позначено довільну сталу.
Для власного значення

$$\lambda_2 = 6$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$x_1 - 2\,x_2 = 0$$

$$-2\,x_1 - 2\,x_3 = 0$$

$$-2\,x_2 - x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2\,_t4_2 \\ _t4_2 \\ -2\,_t4_2 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t4_2$$

позначено довільну сталу.
Для власного значення

$$\lambda_3 = 9$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$-2\,x_1 - 2\,x_2 = 0$$

$$-2\,x_1 - 3\,x_2 - 2\,x_3 = 0$$

$$-2\,x_2 - 4\,x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_3 = \begin{bmatrix} 2\,_t5_3 \\ -2\,_t5_3 \\ _t5_3 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t5_3$$

позначено довільну сталу.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} _t3_1 & 2\,_t4_2 & 2\,_t5_3 \\ 2\,_t3_1 & _t4_2 & -2\,_t5_3 \\ 2\,_t3_1 & -2\,_t4_2 & _t5_3 \end{bmatrix}.$$

◀

Приклад 6.6. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці з використанням процедури **`ВласніЧислаТаВектори`**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

```
A:=<<2,5,-1>|<-1,-3,0>|<2,3,-2>>:
```

`ВласніЧислаТаВектори`(A):

Знайдемо власні вектори та відповідні власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичну матрицю

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

обчислюємо її детермінант та запишемо характеристичне рівняння

$$-1 - 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Визначенням коренів отриманого рівняння знаходимо власні числа матриці

Власні числа:

$$-1, -1, -1$$

Створюємо нульовий вектор вільних членів та стовпець невідомих

$$Null\ Vector = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора

$$(2-\lambda)\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0$$

$$5\,x_1 + (-3-\lambda)\,x_2 + 3\,x_3 = 0$$

$$-x_1 + (-2-\lambda)\,x_3 = 0$$

Для власного значення

$$\lambda_1 = -1$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$3\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0$$

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_1 = \begin{bmatrix} -_t6_3 \\ -_t6_3 \\ _t6_3 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t6_3$$

позначено довільну сталу.

◀

Приклад 6.7. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці з використанням процедури **`ВласніЧислаТаВектори`**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

```
A:=<<0,1,1>|<-1,1,-1>|<0,-2,0>>;
`ВласніЧислаТаВектори`(A):
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Знайдемо власні вектори та відповідні власні вектори матриці

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичну матрицю

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

обчислюємо її детермінант та запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 2 = 0$$

Визначенням коренів отриманого рівняння знаходимо власні числа матриці
Власні числа:

$$2$$

Створюємо нульовий вектор вільних членів та стовпець невідомих

$$Null\ Vector = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Запишемо систему лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора

$$-\lambda\, x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 - 2\, x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - \lambda\, x_3 = 0$$

Для власного значення

$$\lambda_1 = 2$$

система лінійних однорідних рівнянь для визначення координат власного вектора має вигляд

$$-2\, x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2\, x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2\, x_3 = 0$$

Знайдемо нетривіальний розв'язок системи

$$X_1 = \begin{bmatrix} _t7_1 \\ -2\ _t7_1 \\ \frac{3}{2}\ _t7_1 \end{bmatrix}$$

Тут через

$$_t7_1$$

позначено довільну сталу.

◀

1.6.2. Завдання для самостійної роботи.

Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори матриці.

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 19. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. 22. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 28. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. 31. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 32. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. РЯДИ ФУР'Є ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ

2.1 Ортогональність функцій

О. Система неперервних на [a, b] функцій $\{\varphi_n(x)\}$ називається *ортогональною* на цьому проміжку, якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)\cdot dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ c_n > 0, & m = n. \end{cases}$$

О. Число

$$\sqrt{c_n} = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\cdot dx}$$

називається *нормою* функції $\varphi_n(x)$ на проміжку на [a, b], а функція $\varphi_n(x)$ – нормальною на цьому проміжку, за умови

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\cdot dx = 1 \qquad (2.1)$$

О. Система ортогональних на [a, b] функцій $\{\varphi_n(x)\}$

$$\{\varphi_n(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...,$$

називається *нормальною* на цьому проміжку, якщо нормальна кожна функція системи, тобто умова (2.1) виконується для всіх n=0, 1, 2, … .

О. *Тригонометричною системою функцій* називається система

$$1, cos(x), sin(x), cos(2\cdot x), sin(2\cdot x), ..., cos(n\cdot x), sin(n\cdot x), ... \qquad (2.2)$$

Тригонометрична система функцій є ортогональною на проміжку [-π, π]. Покажемо це за допомогою СКМ Maple.

```
restart:
printf(`1.`);
m,n=0,1,2*`,... `,m<>n;
Int(cos(m*x)*cos(n*x),x=-
Pi..Pi)=int(cos(m*x)*cos(n*x),x=-Pi..Pi) assuming
m::nonnegint,n::nonnegint,m<>n;
```

1.

$$m, n = 0, 1, 2, ..., m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\cos(n\,x)\,dx = 0$$

```
printf(`2.`);
```

```
m,n=1,2*`,... `,m<>n;
Int(sin(m*x)*sin(n*x),x=-
Pi..Pi)=int(sin(m*x)*sin(n*x),x=-Pi..Pi)  assuming
m::posint, n::posint,m<>n;
```

2.

$$m, n = 1, 2, \ldots, m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = 0$$

```
printf(`3.`);
m=0,1,2*`,... `,n=1,2*`,... `;
m<>n;
Int(cos(m*x)*sin(n*x),x=-
Pi..Pi)=int(cos(m*x)*sin(n*x),x=-Pi..Pi) assuming
m::nonnegint,n::posint,m<>n;
m=n;
Int(cos(m*x)*sin(n*x),x=-
Pi..Pi)=int(cos(m*x)*sin(n*x),x=-Pi..Pi) assuming
m::nonnegint,n::posint,m=n;
```

3.

$$m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$$

$$m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = 0$$

$$m = n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = 0$$

Слід звернут увагу, що в цих співвідношення 1=*cos*(**0**·*x*).

На основі будь-якої ортогональної системи функцій можна створити нормальну систему. Для цього кожну функцію системи необхідно розділити на її норму. Для тригонометричної системи функцій маємо

```
m=1,2*`,... `,n=1,2*`,... `;
Int(1^2,x=-Pi..Pi)=int(1^2,x=-Pi..Pi);
Int(cos(n*x)^2,x=-Pi..Pi)=int(cos(n*x)^2,x=-Pi..Pi)
assuming n::posint;
Int(sin(n*x)^2,x=-Pi..Pi)=int(cos(n*x)^2,x=-Pi..Pi)
assuming n::posint;
```

$$m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\,\pi\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)^2\, dx = \pi\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)^2\, dx = \pi\,.$$

Отже, можемо записати нормальну ортогональну тригонометричну систему функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2\cdot x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2\cdot x)}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos(n\cdot x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(n\cdot x)}{\sqrt{\pi}}, ...$$

Розглянемо один із найпростіших способів побудови на проміжку [-1, 1] ортогональних поліномів $P_n(x)$ на основі системи функцій

$$1,\ x,\ x^2,\ ...,x^n,\ ...\ .$$

Обчислимо

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot x\cdot dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0\,.$$

Це означає, що перші дві функції ортогональні на проміжку [-1, 1]. Отже, $P_0(x)=1$, $P_1(x)= x$. Наступну функцію запишемо у вигляді квадратичного поліному

$$P_2(x)=a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

коефіцієнти якого шукатимемо з умов ортогональності до перших двох функцій системи $P_0(x)$, $P_1(x)$:

Задаємо квадратичний тричлен

```
P2:=a*x^2+b*x+c:
P[2](x)=P2;
```

$$P_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

та записуємо умови його ортогональності до функцій 1, x

```
int(P2,x=-1..1)=0;
int(P2*x,x=-1..1)=0;
```

$$\int_{-1}^{1} a\,x^2 + b\,x + c\, dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} (a\,x^2 + b\,x + c)\,x\,dx = 0$$

або

$$\frac{2\,a}{3} + 2\,c = 0\,,$$

$$\frac{2\,b}{3} = 0\,,$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь

```
solve({%%,%},{b,a});
```

$$\{b = 0,\ a = -3\,c\}$$

та записуємо квадратичний тричлен з урахуванням знайдених виразів

```
subs(%,P[2]=P2);
```

$$P_2 = -3\,c\,x^2 + c\,.$$

Коефіцієнту c можна надати довільного значення. Нехай $P_2(x=1)=1$, тоді

```
P[2](x=1)=subs(x=1,rhs(%))]=1;
```

$$[P_2(x=1) = -2\,c] = 1\,,$$

і $c = -\frac{1}{2}$, $P_2(x) = \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}$.

Аналогічно $P_3(x) = \frac{5}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x$ і т.д. Це поліноми Лежандра, вони можуть бути обчислені за допомогою простої формули

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right].$$

Обчислення за цією формулою легко реалізувати в Maple

```
printf(`Поліноми Лежандра`);
Pn:=(n,t)->`if`(n=0,1,simplify(diff((t^2-
1)^n,t$n)/(2^n*n!))):
P[n]=Pn(n,x);
```

Поліноми Лежандра

$$P_n = \frac{\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n\right)2^{(-n)}}{n!}$$

```
for I from 0 to 9 do
 P[i](x)=Pn(i,x)
end do;
```

$P_0 = 1$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

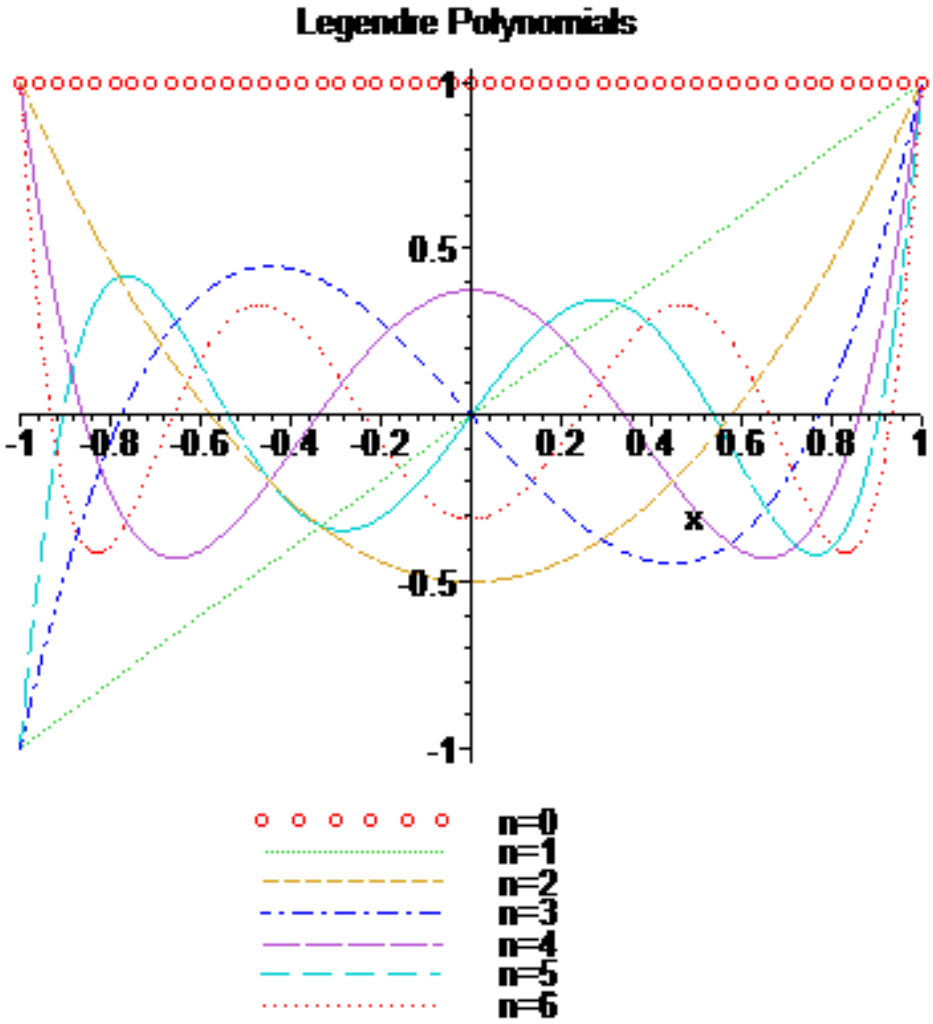
$$P_6(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$$

$$P_7(x) = \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

$$P_8(x) = \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}$$

$$P_9(x) = \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x$$

```
plot([seq(Pn(k,x),k=0..6)],x=-
1..1,linestyle=[1,2,3,4,5,6,7],style=[point,line$6],
legend=["n=0", "n=1","n=2", "n=3","n=4",
"n=5","n=6"],title="Legendre
Polynomials",symbol=circle,symbolsize=8);
```



Відомо також багато інших ортогональних поліномів. Найбільш широке використання знайшли ортогональні поліноми Чебишова, Ерміта, Лагерра та ін.

В задачах обробки сигналів та зображень широко використовуються функції Радемахера.

2.2 Ряди Фур'є

О. *Тригонометричним рядом* називається ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\left(n\cdot x\right)+b_n\cdot\sin\left(n\cdot x\right). \qquad (2.3)$$

де $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — довільні послідовності дійсних чисел, що називаються *коефіцієнтами тригонометричного ряду*.

Оскільки ряд (2.3) складений з періодичних функцій, його сума є періодичною функцією з найменшим періодом $2\cdot\pi$.

Припустимо, що справедливо співвідношення

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\left(n\cdot x\right)+b_n\cdot\sin\left(n\cdot x\right). \qquad (2.4)$$

де $f(x)$ — деяка $2\cdot\pi$ – періодична функція.

Для знаходження коефіцієнтів тригонометричного ряду припустимо, що ряд можна почленно інтегрувати на проміжку $[-\pi,\pi]$ і функція $f(x)$ є інтегровною на цьому проміжку. Формулу для обчислення коефіцієнта a_0 знайдемо в результаті інтегрування обох частин рівності (2.4) на проміжку $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \frac{a_0}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot dx + b_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot dx\right).$$

Оскільки тригонометрична система функцій є ортогональною на проміжку $[-\pi,\pi]$, всі інтеграли під знаком суми дорівнюють нулю, отже

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx. \tag{2.5}$$

Помножимо обидві частини рівності (2.4) на $\cos(k\cdot x)$ і знову проінтегруємо на проміжку $[-\pi,\pi]$:

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot dx = \frac{a_0}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\cdot x)\cdot dx + \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot dx + b_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot dx\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Всі інтеграли в правій частині рівності дорівнюють нулю, за винятком одного доданка при $k=n$

$$a_n\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx = a_n\cdot\pi,$$

отже,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Помноживши обидві частини рівності (2.4) на $\sin(k\cdot x)$ аналогічно отримаємо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Коефіцієнти, обчислені за формулами (2.5), (2.7), (2.8) називаються *коефіцієнтами Фур'є*, а тригонометричний ряд (2.4) з коефіцієнтами Фур'є *— тригонометричним рядом Фур'є.*

Запишемо без доведення теорему про збіжність ряду Фур'є.

Т. (Діріхле) Для $2\cdot\pi$-періодичної, кусково-неперервної та обмеженої на $[-\pi,\pi]$ функції $f(x)$ її ряд Фур'є збігається, причому в точках неперервності $f(x)$ до значень $f(x)$ у цих точках, а в точках розриву — до середнього арифметичного односторонніх границь $f(x)$ у цих точках, тобто до

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

де x_0 — точка розриву $f(x)$.

Ця теорема дає відповідь на декілька питань одночасно:

1) про вимоги, яким має відповідати функція $f(x)$, щоб її ряд Фур'є був збіжним;
2) як саме збігається ряд Фур'є.

На відміну від ряду Тейлора функції $f(x)$ її ряд Фур'є не тільки не вимагає існування всіх похідних цієї функції, а й допускає навіть розриви функції. В той же час швидкість збіжності ряду Фур'є залежить від гладкості функції, для якої цей ряд побудовано.

Якщо $f(x)$ є сумою функцій тригонометричної системи (2.2), наприклад, $f(x)=-\sin(x)+2\cdot\cos(3\cdot x)+3\cdot\sin(6\cdot x)$, то її розвинення в ряд Фур'є з періодом $2\cdot\pi$ співпадає із самою функцією (тут $a_3=2, b_1=-1, b_6=3$, всі інші коефіцієнти дорівнюють нулеві).

Оскільки, за умовою, $f(x)$ — $2\cdot\pi$-періодична функція, то в формулах обчислення коеффіцієнтів Фур'є (2.5), (2.7), (2.8) замість проміжку інтегрування $[-\pi,\pi]$ можна використовувати довільний проміжок довжини $2\cdot\pi$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot\pi} f(x)\cdot dx. \tag{2.9}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

де $\alpha\in\mathbb{R}$.

Отримані формули надають можливість в деяких випадках спростити обчислення коеффіцієнтів Фур'є. Очевидно, що формули (2.9) - (2.11) стають тотожними формулам (2.5), (2.7), (2.8) при $\alpha=-\pi$.

Приклад 2.2.1. Розвинути в ряд Фур'є $2\cdot\pi$-періодичну функцію $f(x)=x$, $-\pi<x\le\pi$.

Розв'язування.

Відповідно до формул (2.5), (2.7), (2.8) знаходимо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix}\right.=0.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx=\left[\begin{matrix}\text{інтегрування}\\\text{частинами}\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[x\cdot\frac{x\cdot\sin(n\cdot x)}{n}\left|\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix}\right.-\frac{1}{n}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot dx\right]=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx=\left[\begin{matrix}\text{інтегрування}\\\text{частинами}\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[-x\cdot\frac{\cos(n\cdot x)}{n}\left|\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix}\right.-\frac{1}{n}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(n\cdot x)\cdot dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi\cdot n}\cdot\left[-\pi\cdot\cos(n\cdot\pi)-\left(-(-\pi)\right)\cdot\cos\left(n\cdot(-\pi)\right)\right]=-\frac{2}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}.$$

В результаті отримуємо ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin(n\cdot x)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{\sin(x)}{1}-\frac{\sin(2\cdot x)}{2}+\frac{\sin(3\cdot x)}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin(n\cdot x)}{n}+\ldots\right).$$

Ця рівність справджується для всіх точок, окрім точок розриву. В усіх точках розриву сума ряду дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ у цих точках, тобто

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to x_0-0}f(x)+\lim_{x\to x_0+0}f(x)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\pi+(-\pi)\right)=0.$$

де x_0 — точка розриву $f(x)$.

◄

2.3. Розкладання в ряд Фур'є парних, непарних, періодичних функцій з довільним періодом та неперіодичних функцій

Для парної та непарної функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ справджуються співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi} f_1(x)\cdot dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\cdot dx = 0.$$

Оскільки добуток двох парних або двох непарних функцій є парною функцією, а добуток парної функції на непарну є непарною функцією, то $f_1(x)\cdot\cos(n\cdot x)$, $f_2(x)\cdot\sin(n\cdot x)$ - парні функції, а $f_1(x)\cdot\sin(n\cdot x)$, $f_2(x)\cdot\cos(n\cdot x)$ - непарні функції. Тоді, відповідно (2.9), матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi} f_1(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{\pi} f_2(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx.$$

З урахуванням співвідношень (2.9)-(2.11) формули (2.4), (2.5), (2.6) для визначення коефіцієнтів Фур'є дещо спрощуються в таких випадках:

1) $f(x)$ - парна функція :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

$$b_n = 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx\right)\cdot\cos(n\cdot x).$$

2) $f(x)$ - непарна функція :

$$a_0 = a_n = 0. \tag{2.12}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.13}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx\right)\cdot\sin(n\cdot x). \qquad (2.14)$$

Це означає, що ряд Фур'є парної функції містить «тільки косинуси», а непарної – «тільки синуси».

Формули (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) легко узагальнити на випадок, коли маємо інтеґровну $2\cdot l$-періодичну функцію $f(x)$, що задана на проміжку $[-l, l]$, де l — деяке додатне число. Перейдемо від змінної x до змінної t шляхом заміни $x=\frac{l}{\pi}\cdot t$ та розглянемо нову функцію $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)$. Очевидно, що функція $\varphi(t)$ є $2\cdot\pi$-періодичною

$$\varphi(t+2\cdot\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}\cdot(t+2\cdot\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t+2\cdot l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)=\varphi(t),$$

отже її можна розвинути на проміжку $[-\pi, \pi]$; в ряд Фур'є :

$$f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)=\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos(n\cdot t)+b_n\cdot\sin(n\cdot t). \qquad (2.15)$$

де

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)\cdot\cos(n\cdot t)\cdot dt,\quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (2.16)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)\cdot\sin(n\cdot t)\cdot dt,\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (2.17)$$

Повернемось до змінної x, тоді $t=\frac{\pi}{l}\cdot x$, $dt=\frac{\pi}{l}\cdot dx$ і формули (2.15)-(2.17) набувають вигляду:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{l}\cdot x\right)+b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{l}\cdot x\right). \qquad (2.18)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot dx, \qquad (2.19)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{l}\cdot x\right)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}, \qquad (2.20)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{l}\cdot x\right)\cdot dx,\quad n\in\mathbb{N}. \qquad (2.21)$$

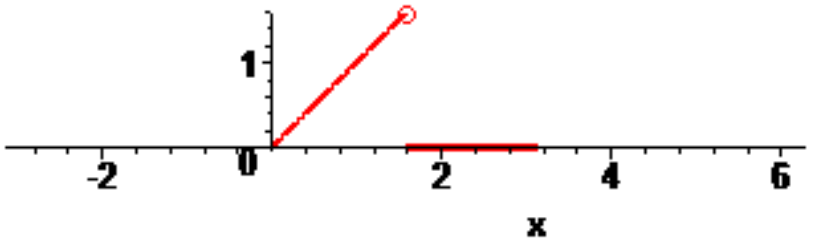
Отримані формули є рядом Фур'є та коефіцієнтами Фур'є для $2 \cdot l$-періодичної, кусково-неперервної та обмеженої на $[-l, l]$ функції $f(x)$. Зберігається можливість обчислювати коефіцієнти Фур'є інтегруванням на проміжкуз довільною лівою межею та довжиною рівною періоду, а також властивості рядів Фур'є для парних та непарних функцій. При $l = \pi$ формули (2.18)-(2.21) стають тотожними формулам (2.4), (2.5), (2.7), (2.8).

Під час розв'язання широкого кола інженерних задач виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x)$, що задана на скінченному проміжку $[0, l]$. Щоб скористатися отриманими формулами ми можемо продовжити функцію на проміжок $[-l, 0]$ одним із способів: 1) відобразити графік функції відносно осі *Oy* (парний спосіб); 2) відобразити графік функції відносно початку координат *x*=0, *y*=0 (непарний спосіб). Звичайно, ряд Фур'є функції, що продовжена парним способом буде містити тільки косинуси, а непарним – тільки синуси.

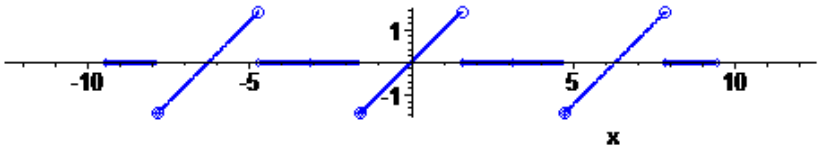
Приклад 2.3.1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$

Розв'язування.

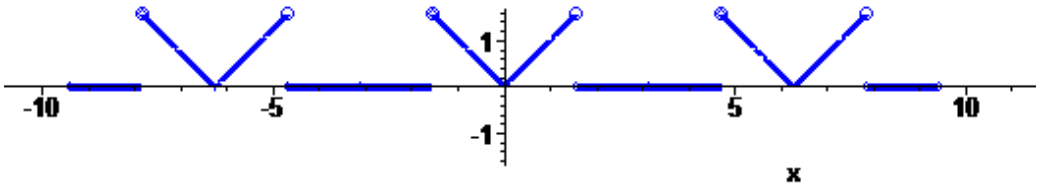
Спосіб 1: продовжимо задану функцію, графік якої зображено на рис. 2.1 *а* непарним способом на проміжок $[-\pi, 0]$ і після цього вважатимемо цю функцію періодичною з періодом $2 \cdot \pi$ (рис. 2.1 *б*).



а)



б)



в)

Рис. 2.1.

На основі формул (2.13), (2.14) матимемо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cdot\sin(n\cdot x)\cdot dx\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{інтегрування}\\ \text{частинами}\end{matrix}\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left(-\frac{x\cdot\cos(n\cdot x)}{n} + \frac{\sin(n\cdot x)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2\cdot n}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right).$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{2\cdot n}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right)\cdot\sin(n\cdot x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{1^2} + \frac{\pi}{2^2}\cdot\sin(2\cdot x) - \frac{\sin(3\cdot x)}{3^2} - \frac{\pi}{8}\cdot\sin(4\cdot x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(5\cdot x)}{5^2} + \frac{\pi}{12}\cdot\sin(6\cdot x) - \frac{\sin(7\cdot x)}{7^2} + \frac{\pi}{16}\cdot\sin(8\cdot x) + \ldots\right).$$

Слід зауважити, що цей приклад розглянуто в навчальному посібнику [1], в якому допущено помилку: при обчисленні коефіцієнта b_n після підставляння верхньої межі інтегрування записано доданок $\frac{\pi}{n}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$ замість $\left(-\frac{\pi}{2\cdot n}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right)$, що призвело і до спотворення виразу ряду Фур'є для заданої функції.

Остання рівність справджується в усіх точках проміжку $[0,\pi]$ за

винятком точки $x=\frac{\pi}{2}$, в якій сума ряду, відповідно до теореми Діріхле, дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь $f(x)$ у цій точці, тобто $\frac{\pi}{4}$, а значення функції $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Ряд збігається до 2·π-періодичної функції

$$F(x)=\begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}\le x\le\pi; \\ \frac{\pi}{4}, & x\pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

на всій числовій осі.

На основі отриманого розвинення функції в ряд Фур'є можна отримати різні числові ряди, зокрема при при $x=\frac{\pi}{2}$, отримаємо відомий числовий ряд

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)$$

або

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

Спосіб 2: продовжимо функцію парним способом на проміжок $[-\pi,0]$ і після цього вважатимемо цю функцію періодичною з періодом 2·π (рис. 2.1 *в*).

На основі формул (2.13), (2.14) матимемо

$$a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}f(x)\cdot dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0\cdot dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}=\frac{\pi}{4},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0\cdot\cos(n\cdot x)\cdot dx\right)=$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{інтегрування}\\ \text{частинами}\end{matrix}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{x\cdot\sin(n\cdot x)}{n}+\frac{\cos(n\cdot x)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot n} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) - \frac{1}{n^2} \cdot \cos\left(n \cdot 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot n^2} \cdot \left(\pi \cdot n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) - 2 \right)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\pi \cdot n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) - 2 \right) \cdot \cos\left(n \cdot x \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\pi} \cdot \left((\pi - 2) \cdot \cos(x) - \cos(2 \cdot x) - \left((3 \cdot \pi + 2) \right) \cdot \frac{\cos(3 \cdot x)}{3^2} + \right.$$

$$\left. + (5 \cdot \pi - 2) \cdot \frac{\cos(5 \cdot x)}{5^2} - \frac{\cos(6 \cdot x)}{3^2} - \left((7 \cdot \pi + 2) \right) \cdot \frac{\cos(7 \cdot x)}{7^2} + \ldots \right).$$

◀

В наступному підрозділі за допомогою СКМ Maple ми проаналізуємо результати розрахунків на основі формул для ряду Фур'є, що отримані розглянутими двома способами, у співставлені з графіком заданої функції.

2.4 Розв'язування прикладних задач в середовищі системи комп'ютерної математики

В СКМ Maple відсутні стандартні команди для побудови рядів Фур'є. Проте доволі нескладно записати власні команди в системі, що надають можливість не тільки обчислювати коефіцієнти Фур'є і будувати відповідні ряди, а й аналізувати отримані результати у співставленні із заданою функцією за допомогою побудованих графіків. При цьому рутинні операції визначення коефіцієнтів Фур'є шляхом обчислення визначених інтегралів можна повністю або частково автоматизувати, як і процес побудови різних графіків. Саме тому використання СКМ до побудови рядів Фур'є є надзвичайно ефективним.

Частинну суму $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)$$

називають тригонометричним поліномом порядку *n*. Ці многочлени, що також є функціями п е р і о д у $2 \cdot \pi$, дають змогу знайти наближення заданої функції $f(x) \approx S_n(x)$. Похибка такого наближення, не враховуючи ефекта Гібса, зменшується зі збільшенням числа *n*. Існують оцінки похибки вказаного наближення, проте вони набагато складніше ніж для поліномів Тейлора.

Розглянемо використання СКМ Maple для побудови рядів Фур'є на класичних прикладах функцій.

Приклад 2.4.1. Розвинути в ряд Фур'є $2\cdot\pi$ функцію:

а) $f(x)=\pi+x, \quad x\in(-\pi;\pi]$ (рис. 2.2);

б) $\psi(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ (рис. 2.3).

Розв'язування.

Задані функції кусково-монотонні на проміжку $[-\pi,\pi]$, тому їх можна розвинути в ряд Фур'є.

а) Задамо цю функцію в середовищі СКМ Maple та побудуємо її графік:

```
restart:
with(plots):
with(plottools):
y:=x->piecewise((x>-Pi and x<=Pi),Pi+x,none):
p:=plot([y(x)],x=-
1*Pi..1*Pi,style=[line],discont=true,thickness=[3],col
or=blue,scaling=constrained):
p1:=plot([seq([[-3*Pi+2*Pi*k,0]],k=0..2)[]],x=-
3*Pi..3*Pi,style=[point],symbol=circle,symbolsize=15,c
olor=blue,scaling=constrained):
display([p1,p, translate(p, 2*Pi,0), translate(p, -
2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```

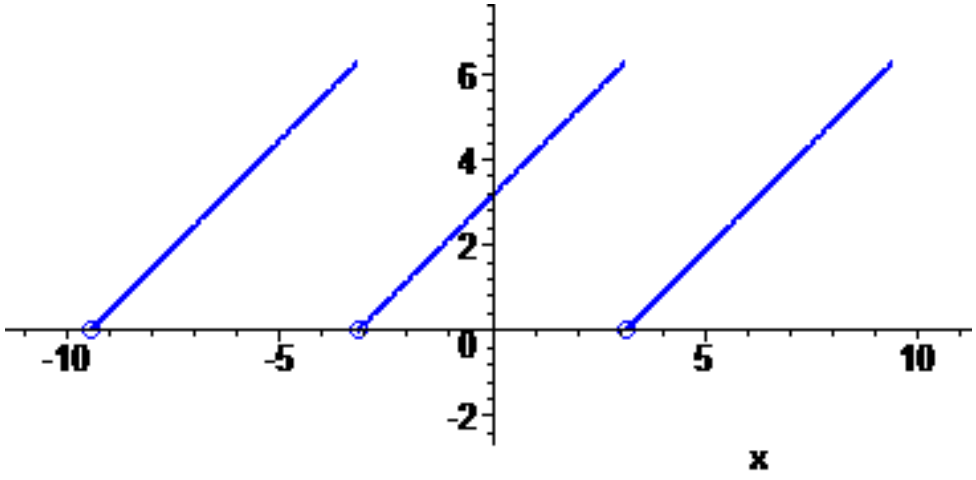


Рис. 2.2.

Задана функція ні парна ні непарна. Запишемо коефіцієнти Фур'є

```
A:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*cos(k*x),x=-Pi..Pi): #
k=0,1,2,3,...
 a[k]=A(f,k);
```

```
a[0]:=A(f,0);
```

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\cos(k\,x)\,dx$$

$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\,dx$$

```
B:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*sin(k*x),x=-Pi..Pi): #
k=0,1,2,3,...
b[k]=B(f,k);
```

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin(k\,x)\,dx$$

та ряд Фур'є

```
FOURIER_series:=a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*x)+b[k]*sin(k*x)
,k=1..infinity);
```

$$FOURIER_series := \frac{1}{2}a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x)+b_k\sin(k\,x)\right)\right)$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є

```
a[0]:=A(y,0);
a[k]=A(y,k);
simplify(%) assuming k::posint;
ak:=unapply(rhs(%),k):
```

$$a_0 := 2\,\pi$$

$$a_k = \frac{2\sin(\pi\,k)}{k}$$

$$a_k = 0$$

```
b[0]:=B(y,0);
b[k]=B(y,k);
simplify(%) assuming k::posint;
bk:=unapply(rhs(%),k):
```

$$b_0 := 0$$

$$b_k = -\frac{2\,(-\sin(\pi\,k)+\cos(\pi\,k)\,k\,\pi)}{\pi\,k^2}$$

$$b_k = \frac{2\,(-1)^{(1+k)}}{k}$$

Запишемо частинну суму $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є з урахуванням знайдених коефіцієнтів

```
subs(a[k]=ak(k),b[k]=bk(k),a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*x)+b[
k]*sin(k*x),k=1..n)):
Sn:=unapply(eval(%),[x,n]):
```

```
S[n]=Sn(x,n);
```

$$S_n = \pi + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2\,(-1)^{(1+k)} \sin(k\,x)}{k} \right) \right)$$

та ряд Фур'є

```
f(x)=Sn(x,infinity);
```

$$f(x) = \pi + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\,(-1)^{(1+k)} \sin(k\,x)}{k} \right) \right)$$

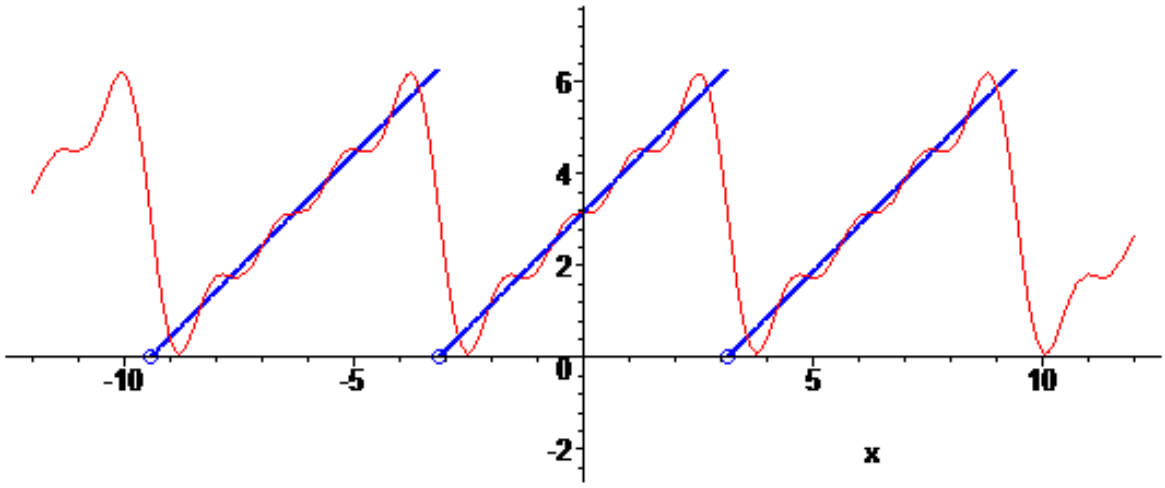
Ця рівність справедлива для всіх точок неперервності заданої функції, тобто при $x \neq \pm(2\cdot k-1)\cdot\pi, k \in \mathbb{N}$. У точках розриву сума ряду Фур'є дорівнює півсумі односторонніх границь в цих точках, тобто $S_\infty\left(x = \pm(2\cdot k-1)\cdot\pi\right) = \pi, k \in \mathbb{N}$, де

$$S_\infty(x) = \pi + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(k\cdot x)}{k}.$$

Розглянемо частинні суми $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є з різними значеннями числа членів ряду та їх порівняння із заданою функцією на відповідних графіках

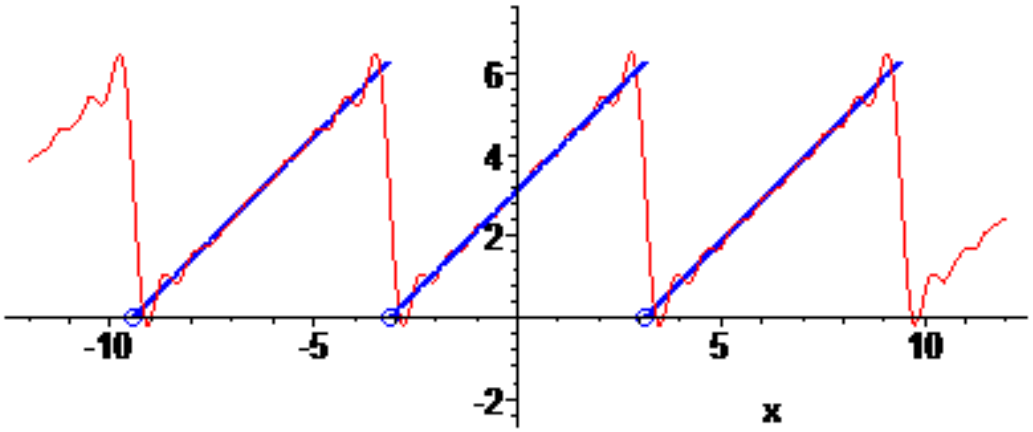
```
N:=4:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```

$$S_4(x) = \pi + 2\sin(x) - \sin(2\,x) + \frac{2}{3}\sin(3\,x) - \frac{1}{2}\sin(4\,x)$$



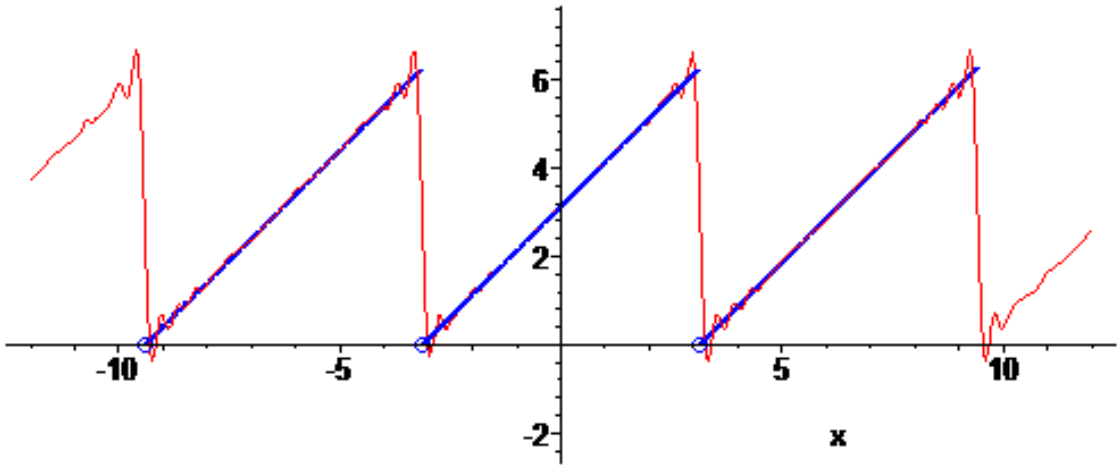

```
N:=8:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```

$$S_8(x) = \pi + 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$$
$$-\frac{1}{3}\sin(6x) + \frac{2}{7}\sin(7x) - \frac{1}{4}\sin(8x)$$

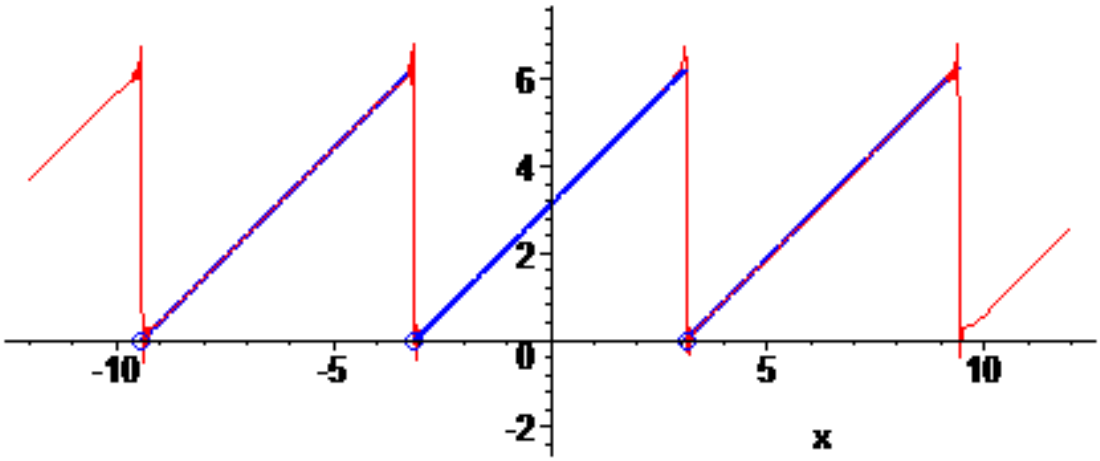



```
N:=16:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```

$$S_{16}(x) = \pi + 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$$
$$-\frac{1}{3}\sin(6x) + \frac{2}{7}\sin(7x) - \frac{1}{4}\sin(8x) + \frac{2}{9}\sin(9x) - \frac{1}{5}\sin(10x)$$
$$+\frac{2}{11}\sin(11x) - \frac{1}{6}\sin(12x) + \frac{2}{13}\sin(13x) - \frac{1}{7}\sin(14x)$$
$$+\frac{2}{15}\sin(15x) - \frac{1}{8}\sin(16x)$$




```
N:=100:S[N](x)=Sn(x,N):
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```



На цих графіках наочно продемонстровано, що з ростом числа членів частинних сум $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є зростає точність представлення ними заданої функції $f(x)$.

Точка $x=\frac{\pi}{2}$ є точкою неперервності заданої функції, отже,

$$f\left(x=\frac{\pi}{2}\right)=S_{\infty}\left(x=\frac{\pi}{2}\right).$$

або

$$\frac{3\cdot\pi}{2}=\pi+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k}{2}\right)}{k},$$

звідки

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot k}{2}\right)}{k}. \qquad (2.22)$$

Запишемо члени ряду в останній рівності за допомогою Maple-команд

```
sum((-1)^(k+1)*sin(x*k)/k,k=1..infinity)=sum((-
1)^(k+1)*sin(x*k)/k,k=1..16)+`...`;
printf(`Підставимо `);print(x=Pi/2);
subs(x=Pi/2,lhs(%))=map(z-
>{eval(subs(x=Pi/2,z))},rhs(%));
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(1+k)}\sin(k\,x)}{k}=\sin(x)-\frac{1}{2}\sin(2\,x)+\frac{1}{3}\sin(3\,x)-\frac{1}{4}\sin(4\,x)$$
$$+\frac{1}{5}\sin(5\,x)-\frac{1}{6}\sin(6\,x)+\frac{1}{7}\sin(7\,x)-\frac{1}{8}\sin(8\,x)+\frac{1}{9}\sin(9\,x)$$
$$-\frac{1}{10}\sin(10\,x)+\frac{1}{11}\sin(11\,x)-\frac{1}{12}\sin(12\,x)+\frac{1}{13}\sin(13\,x)$$
$$-\frac{1}{14}\sin(14\,x)+\frac{1}{15}\sin(15\,x)-\frac{1}{16}\sin(16\,x)+\ldots$$

Підставимо

$$x=\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(1+k)}\sin\left(\frac{\pi\,k}{2}\right)}{k}=\{1\}+8\{0\}+\{\frac{-1}{3}\}+\{\frac{1}{5}\}+\{\frac{-1}{7}\}+\{\frac{1}{9}\}$$
$$+\{\frac{-1}{11}\}+\{\frac{1}{13}\}+\{\frac{-1}{15}\}+\{\ldots\}$$

На основі останньої рівності з урахуванням (2.22) запишемо суму числового ряду

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2\cdot k-1)}=\frac{\pi}{4}.$$

Таким чином, користуючись розвиненням в ряди Фур'є певних функцій, можна знаходити суми відповідних числових рядів.

Як міру похибки наближення на проміжку $[a,b]$ функції $f(x)$ за допомогою деякої іншої функції $g(x)$, звичайно використовують *найбільше відхилення функції* $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)-g(x)\right|$ та *середнє квадратичне відхилення* $\varepsilon^2=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)^2\cdot dx$.

Можна показати, що

$$\varepsilon_n^2=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2\cdot dx=$$
$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\cdot dx-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)-\frac{a_0^2}{4}.$$

Відомо, що серед всіх тригонометричних поліномів *n*-го порядку найменше середнє квадратичне відхилення ε^2 на $[-\pi,\pi]$ від $2\cdot\pi$ - періодичної функції $f(x)$ має $S_n(x)$ - *n*-на частинна сума ряду Фур'є цієї функції.

За допомогою Maple-команд ми можемо автоматизувати обчислення значень функції в деяких характерних точках з їх порівнянням зі значеннями *n*-их частинних сум ряду Фур'є цієї функції, а також середнє квадратичне відхилення ε_n^2. Представимо програмний код, що формує вказані значення у вигляді відповідної таблиці

```
with(Spread):
CreateSpreadsheet(Fourier_Err_a);
SetCellFormula(Fourier_Err_a,A1,n);
SetCellFormula(Fourier_Err_a,B1,x);
SetCellFormula(Fourier_Err_a, C1, `d.p. f(x)`);
SetCellFormula(Fourier_Err_a,D1,f(x));
SetCellFormula(Fourier_Err_a,E1,S[n](x));
SetCellFormula(Fourier_Err_a,F1,abs(f(x)-S[n](x)));
SetCellFormula(Fourier_Err_a,G1,[epsilon,"%"]);
SetCellFormula(Fourier_Err_a,H1,delta[n]^2);
N:=[4,8,16,100]:Xn:=[0,Pi/6,Pi/2,Pi]:DP:=[`NO`,`NO`,`N
O`,`YES`]:
ij:=2:
for i to nops(Xn) do
  for j to nops(N) do
     dlt:= int(y(x)^2,x=-Pi..Pi)/(2*Pi)-a[0]^2/4-
add(ak(k)^2+bk(k)^2,k=1..N[j])/2;
     SetCellFormula(Fourier_Err_a,A||(ij),N[j]);
     SetCellFormula(Fourier_Err_a,B||(ij),Xn[i]);
     SetCellFormula(Fourier_Err_a, C||(ij), DP[i]);

SetCellFormula(Fourier_Err_a,D||(ij),evalf[5](y(Xn[i])
));

SetCellFormula(Fourier_Err_a,E||(ij),evalf[5](abs(Sn(X
n[i],N[j]))));

SetCellFormula(Fourier_Err_a,F||(ij),evalf[5](abs(Sn(X
n[i],N[j])-y(Xn[i]))));

SetCellFormula(Fourier_Err_a,G||(ij),`if`(y(Xn[i])=0,`
`,evalf[5](100*abs(y(Xn[i])-
Sn(Xn[i],N[j]))/y(Xn[i]))));
     if i=1 then

SetCellFormula(Fourier_Err_a,H||(ij),`if`(length(conve
rt(dlt,string))<31,dlt=evalf[4](dlt),evalf[4](dlt)));
     end if;
     ij:=ij+1
```

```
  end do:
end do:
`d.p. f(x)`->`discontinuity point of the f(x)`;
epsilon=abs(f(x)-S[n](x))/f(x)*100;
```

Результатом роботи наведеного програмного коду є табл. 2.1. Дані, що розміщені в цій таблиці є корисною інформацією на додаток до наведених вище графіків.

Таблиця 2.1

n	x	*d.p. f(x)*	$f(x)$	$S_n(x)$	$\lvert f(x) - S_n(x) \rvert$	[ε, "%"]	$\delta_n^{\,2}$
4	0	*NO*	3.1416	3.1416	0.	0.	$\frac{\pi^2}{3} - \frac{205}{72} = 0.443$
8	0	*NO*	3.1416	3.1416	0.	0.	$\frac{\pi^2}{3} - \frac{1077749}{352800} = 0.235$
16	0	*NO*	3.1416	3.1416	0.	0.	0.121
100	0	*NO*	3.1416	3.1416	0.	0.	0.020
4	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	3.6653	3.5092	0.1560	4.2562	
8	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	3.6653	3.7828	0.1176	3.2085	
16	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	3.6653	3.6212	0.0440	1.2005	
100	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	3.6653	3.6579	0.0073	0.19917	
4	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	4.7124	4.4749	0.2375	5.0399	
8	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	4.7124	4.5892	0.1232	2.6144	
16	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	4.7124	4.6501	0.0623	1.3221	
100	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	4.7124	4.7024	0.0100	0.21221	
4	π	*YES*	6.2832	3.1416	3.1416	50.	
8	π	*YES*	6.2832	3.1416	3.1416	50.	
16	π	*YES*	6.2832	3.1416	3.1416	50.	
100	π	*YES*	6.2832	3.1416	3.1416	50.	

$$\text{`d.p. } f(x)\text{`} \rightarrow \text{`discontinuity point of the } f(x)\text{`}$$

$$\varepsilon = \frac{100\,\lvert f(x) - S_n(x) \rvert}{f(x)}$$

б) Задамо цю функцію в середовищі СКМ Maple та побудуємо її графік:

```
restart:
with(plots):
with(plottools):
y:=x->piecewise((x>-Pi and x<0,0,x>=0 and
x<=Pi,x,none):
p:=plot([y(x)],x=-
1*Pi..1*Pi,style=[line],discont=true,thickness=[3],col
or=blue,scaling=constrained):
p1:=plot([seq([[-3*Pi+2*Pi*k,0]],k=0..2)[]],x=-
3*Pi..3*Pi,style=[point],symbol=circle,symbolsize=15,c
olor=blue,scaling=constrained):
display([p1,p, translate(p, 2*Pi,0), translate(p, -
2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.7..7.7]);
```

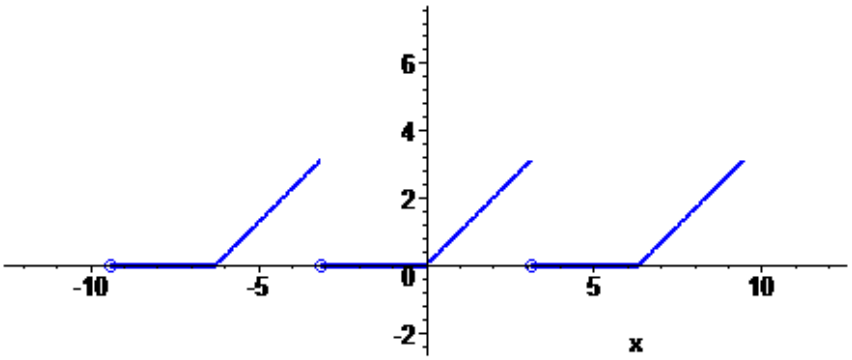


Рис. 2.3.

Задана функція ні парна ні непарна. Запишемо та обчислимо коефіцієнти Фур'є

```
evaln(a[0])=(1/Pi)*Int(y(x),x=-Pi..Pi);
a[k]=(1/Pi)*Int(y(x)*cos(k*x),x=-Pi..Pi);
A:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*cos(k*x),x=-Pi..Pi):
a[k]=A(y,k);# k=1,2,3,...
simplify(%) assuming k::posint;
```

```
ak:=unapply(rhs(%),k):
a[0]:=A(y,0);
```

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{cases} 0 & -\pi < x \text{ and } x < 0 \\ x & 0 \le x \text{ and } x \le \pi \\ none & otherwise \end{cases} dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\begin{cases} 0 & -\pi < x \text{ and } x < 0 \\ x & 0 \le x \text{ and } x \le \pi \\ none & otherwise \end{cases} \right) \cos(k\,x)\,dx$$

$$a_k = \frac{-1 + \cos(\pi\,k) + \sin(\pi\,k)\,k\,\pi}{\pi\,k^2}$$

$$a_k = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi\,k^2}$$

$$a_0 := \frac{\pi}{2}$$

```
b[k]=(1/Pi)*Int(y(x)*sin(k*x),x=-Pi..Pi);
B:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*sin(k*x),x=-Pi..Pi):
b[k]=B(y,k);# k=1,2,3,...
simplify(%) assuming k::posint;
bk:=unapply(rhs(%),k):
```

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\begin{cases} 0 & -\pi < x \text{ and } x < 0 \\ x & 0 \le x \text{ and } x \le \pi \\ none & otherwise \end{cases} \right) \sin(k\,x)\,dx$$

$$b_k = -\frac{-\sin(\pi\,k) + \cos(\pi\,k)\,k\,\pi}{\pi\,k^2}$$

$$b_k = -\frac{(-1)^k}{k}$$

Запишемо ряд Фур'є

```
psi(x)=evaln(a[0])/2+Sum(a[k]*cos(k*x)+b[k]*sin(k*x),k
=1..infinity);
psi(x)=a[0]/2+Sum(ak(k)*cos(k*x)+bk(k)*sin(k*x),k=1..i
nfinity);
```

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x) \right) \right)$$

$$\psi(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1 + (-1)^k)\cos(k\,x)}{\pi\,k^2} - \frac{(-1)^k \sin(k\,x)}{k} \right) \right)$$

Частинна суму $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є з урахуванням знайдених коефіцієнтів

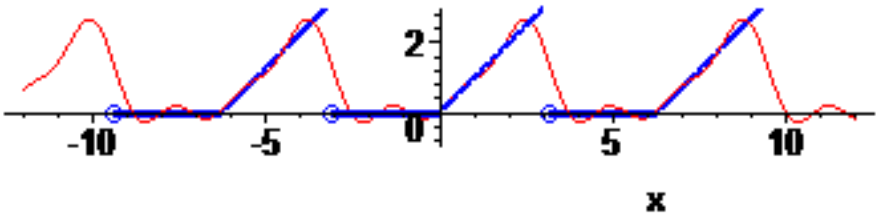
```
subs(a[k]=ak(k),b[k]=bk(k),a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*x)+b[
k]*sin(k*x),k=1..n)):
Sn:=unapply(eval(%),[x,n]):
S[n]=Sn(x,n);
```

$$S_n = \frac{\pi}{4} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1+(-1)^k)\cos(k\,x)}{\pi\,k^2} - \frac{(-1)^k \sin(k\,x)}{k} \right) \right)$$

Розглянемо частинні суми $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є з різними значеннями числа членів ряду та їх порівняння із заданою функцією на відповідних графіках

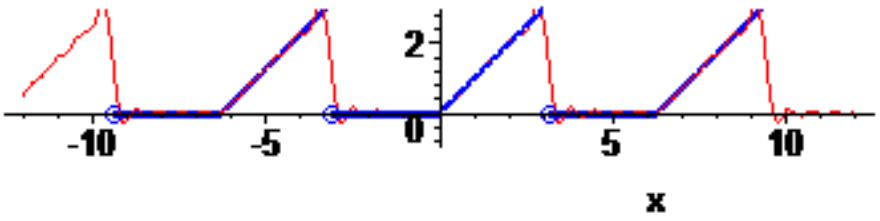
```
N:=3:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-1.0..3]);
```

$$S_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos(x)}{\pi} + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\,x) - \frac{2}{9}\frac{\cos(3\,x)}{\pi} + \frac{1}{3}\sin(3\,x)$$

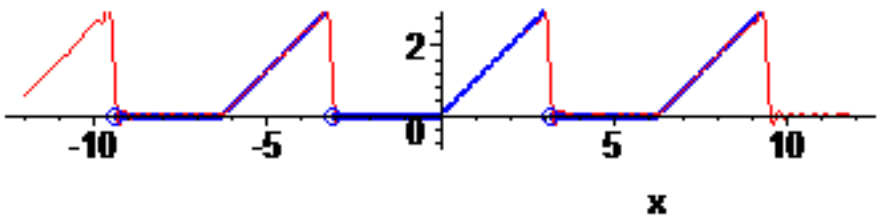



```
N:=9:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-1.0..3]);
```

$$S_9(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\cos(x)}{\pi} + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\,x) - \frac{2}{9}\frac{\cos(3\,x)}{\pi} + \frac{1}{3}\sin(3\,x)$$
$$- \frac{1}{4}\sin(4\,x) - \frac{2}{25}\frac{\cos(5\,x)}{\pi} + \frac{1}{5}\sin(5\,x) - \frac{1}{6}\sin(6\,x) - \frac{2}{49}\frac{\cos(7\,x)}{\pi}$$
$$+ \frac{1}{7}\sin(7\,x) - \frac{1}{8}\sin(8\,x) - \frac{2}{81}\frac{\cos(9\,x)}{\pi} + \frac{1}{9}\sin(9\,x)$$




```
N:=18:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-1.0..3]);
```



Отриманий ряд Фур'є збігається на всій числовій осі до 2π-періодичної функції $\psi_1(x)$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\end{cases}$$

що відрізняється від функції $\psi(x)$ тільки значенням в точках $x=\pm(2\cdot k-1)\cdot\pi$.

Побудуємо таблицю (табл. 2.2.).

```
with(Spread):
CreateSpreadsheet(Fourier_Err_b);
SetCellFormula(Fourier_Err_b,A1,n);
SetCellFormula(Fourier_Err_b,B1,x);
SetCellFormula(Fourier_Err_b, C1, `d.p. f(x)`);
SetCellFormula(Fourier_Err_b,D1,f(x));
SetCellFormula(Fourier_Err_b,E1,S[n](x));
SetCellFormula(Fourier_Err_b,F1,abs(f(x)-S[n](x)));
SetCellFormula(Fourier_Err_b,G1,[epsilon,"%"]);
SetCellFormula(Fourier_Err_b,H1,delta[n]^2);
N:=[3,9,18]:Xn:=[-
Pi/2,0,Pi/6,Pi/2,Pi]:DP:=[`NO`,`NO`,`NO`,`NO`,`YES`]:
ij:=2:
for i to nops(Xn) do
    for j to nops(N) do
     dlt:= int(y(x)^2,x=-Pi..Pi)/(2*Pi)-a[0]^2/4-
add(ak(k)^2+bk(k)^2,k=1..N[j])/2;
     SetCellFormula(Fourier_Err_b,A||(ij),N[j]);
     SetCellFormula(Fourier_Err_b,B||(ij),Xn[i]);
     SetCellFormula(Fourier_Err_b, C||(ij), DP[i]);
```

```
SetCellFormula(Fourier_Err_b,D||(ij),evalf[5](y(Xn[i])
));

SetCellFormula(Fourier_Err_b,E||(ij),evalf[5](abs(Sn(X
n[i],N[j]))));

SetCellFormula(Fourier_Err_b,F||(ij),evalf[5](abs(Sn(X
n[i],N[j])-y(Xn[i]))));

SetCellFormula(Fourier_Err_b,G||(ij),`if`(y(Xn[i])=0,`
`,evalf[5](100*abs(y(Xn[i])-
Sn(Xn[i],N[j]))/y(Xn[i]))));
     if i=1 then

SetCellFormula(Fourier_Err_b,H||(ij),`if`(length(conve
rt(dlt,string))<31,dlt=evalf[4](dlt),evalf[4](dlt)));\
     end if;
     ij:=ij+1
  end do:
end do:
`d.p. f(x)`->`discontinuity point of the f(x)`;
epsilon=abs(f(x)-S[n](x))/f(x)*100;
```

Таблиця 2.2

n	x	*d.p. f(x)*	$f(x)$	$S_n(x)$	$\lvert f(x)-S_n(x)\rvert$	[ε, "%"]	$\delta_n^{\,2}$
3	$-\frac{\pi}{2}$	*NO*	0.	0.11873	0.11873		$\frac{5\pi^2}{48}-\frac{49}{72}-\frac{164}{81\pi^2}=0.1433$
9	$-\frac{\pi}{2}$	*NO*	0.	0.04952	0.04952		0.0536
18	$-\frac{\pi}{2}$	*NO*	0.	0.02769	0.02769		0.0281
3	0	*NO*	0.	0.07805	0.07805		
9	0	*NO*	0.	0.03174	0.03174		
18	0	*NO*	0.	0.01767	0.01767		
3	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	0.52361	0.63438	0.11074	21.150	
9	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	0.52361	0.47692	0.04671	8.9208	
18	$\frac{\pi}{6}$	*NO*	0.52361	0.53074	0.00710	1.3560	

3	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	1.5708	1.4521	0.11873	7.5586	
9	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	1.5708	1.6203	0.04952	3.1526	
18	$\frac{\pi}{2}$	*NO*	1.5708	1.5985	0.02769	1.7628	
3	π	*YES*	3.1416	1.4928	1.6488	52.483	
9	π	*YES*	3.1416	1.5391	1.6025	51.009	
18	π	*YES*	3.1416	1.5531	1.5885	50.563	

$$`d.p.\ f(x)` \rightarrow `discontinuity\ point\ of\ the\ f(x)`$$

$$\varepsilon = \frac{100\,|\,f(x) - S_n(x)\,|}{f(x)}$$

Наведені результати обчислення наочно демонструють, зокрема, що на відміну від точок неперервності, для точок розриву функції збільшення числа *n* не впливає на точність

◄

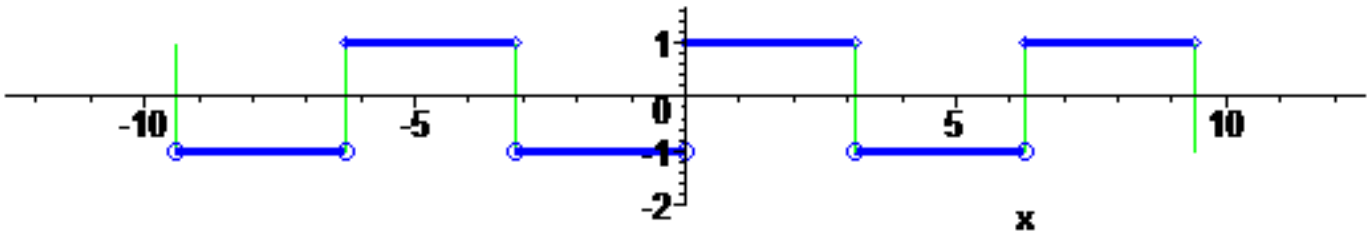
Приклад 2.4.2. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язування.

Побудуємо графік цієї функції з використанням середовища Maple

```
restart:
with(plots):
with(plottools):
y:=x->piecewise((x>-Pi and x<0),-1,x>=0 and
x<=Pi,1,none):
ddL:=[seq([k*Pi,t,t=-1..1],k=-1..1)]:
p:=plot([y(x),ddL[]],x=-
1*Pi..1*Pi,style=[line],discont=true,thickness=[3,1$no
ps(ddL)],linestyle=[1,3$nops(ddL)],color=[blue,green$n
ops(ddL)],scaling=constrained):
p1:=plot([seq([[-3*Pi+1*Pi*k,-1]],k=0..5)[]],x=-
3*Pi..3*Pi,style=[point],symbol=circle,symbolsize=15,c
olor=blue,scaling=constrained):
display([p1,p, translate(p, 2*Pi,0), translate(p, -
2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.0..1.7]);g10:=%:
```



Ця функція непарна, отже з урахуванням формул (2.12), (2.13)

$$a_0 = a_n = 0.$$

Коефіцієнти b_n обчислимо за формулою (2.14)

```
b[k]=(2/Pi)*Int(y(x)*sin(k*x),x=0..Pi);
B:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*sin(k*x),x=-Pi..Pi):
b[k]=B(y,k);# k=1,2,3,...
simplify(%) assuming k::posint;
bk:=unapply(rhs(%),k):
```

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\begin{cases} -1 & -\pi < x \text{ and } x < 0 \\ 1 & 0 \le x \text{ and } x \le \pi \\ none & otherwise \end{cases} \right) \sin(k\,x)\,dx$$

$$b_k = -\frac{2\,(\cos(k\,\pi)-1)}{\pi\,k}$$

$$b_k = \frac{2\,((-1)^{(1+k)}+1)}{\pi\,k}$$

Запишемо ряд Фур'є

```
psi(x)=Sum(b[k]*sin(k*x),k=1..infinity);
psi(x)=Sum(bk(k)*sin(k*x),k=1..infinity);
```

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\,x)$$

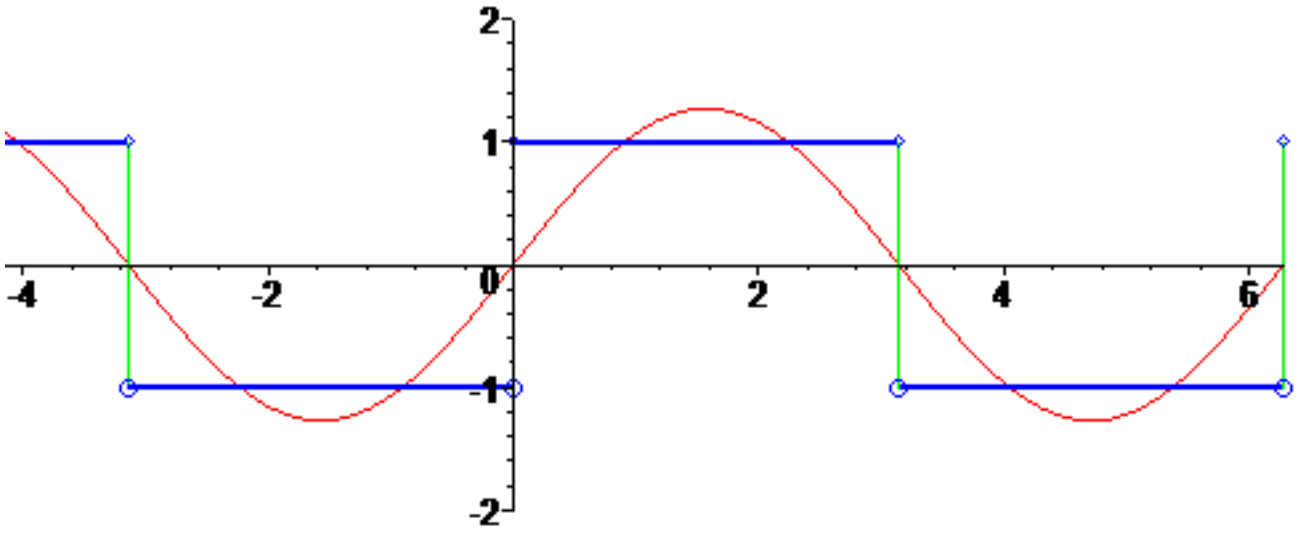
$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\,((-1)^{(1+k)}+1)\sin(k\,x)}{\pi\,k} \right)$$

Очевидно, що врахування парності або непарності зданої функції дещо спрощує формули для визначення коефіцієнтів Фур'є.

Далі у співставленні графіків заданої функції, як з частинними сумами $S_n(x)$ тригонометричного ряду Фур'є, так і окремими доданками цих сум, наочно показано, як із збільшенням n покращується точність наближеного представлення.

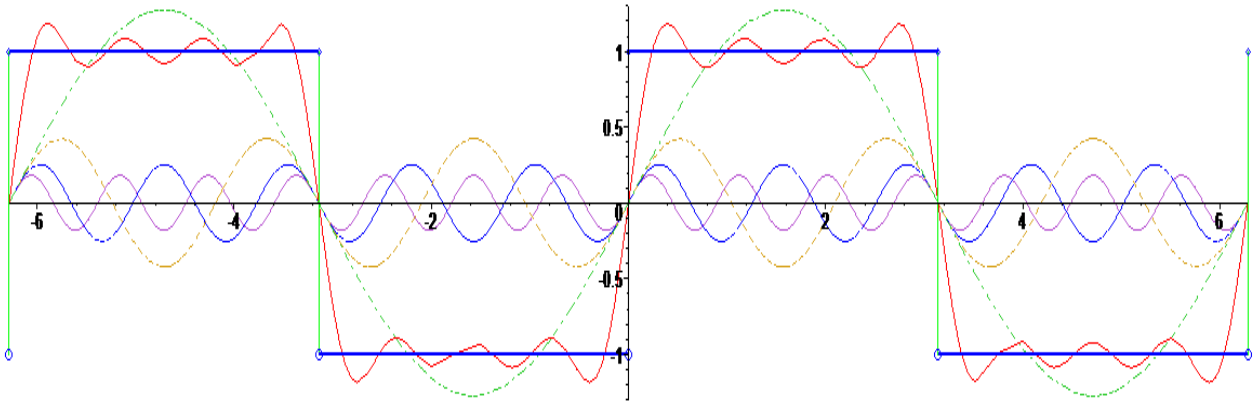
```
N:=1:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-6.3..6.3):p||N:=%:
display([g10,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-4*Pi..4*Pi,-2.0..3]);
```

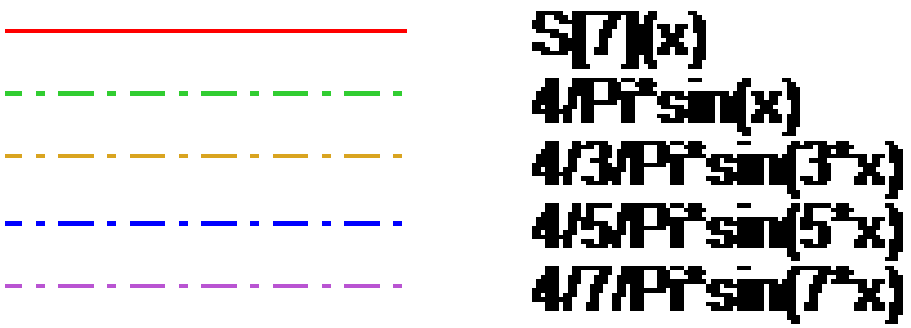
$$S_1(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi}$$



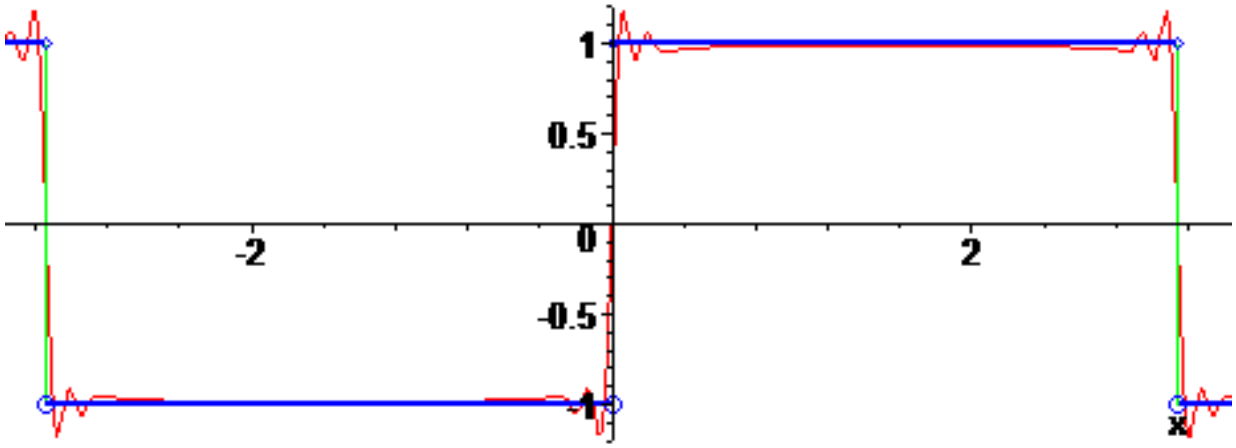

```
N:=7:S[N](x)=Sn(x,N);
fk:=convert(Sn(x,N),list):
plot([Sn(x,N),fk[]],x=-6.3..6.3,
legend=[convert(S[N](x),string), map(zz-
>convert(zz,string),fk)[]],linestyle=[1,4$nops(fk)],la
bels=[``, ``]):p||N:=%:
display([g10,p7],view=[-2*Pi..2*Pi,-
1.3..1.3],labels=[``, ``]);
```

$$S_7(x) = \frac{4\sin(x)}{\pi} + \frac{4}{3}\frac{\sin(3x)}{\pi} + \frac{4}{5}\frac{\sin(5x)}{\pi} + \frac{4}{7}\frac{\sin(7x)}{\pi}$$






```
N:=47:S[N](x)=Sn(x,N):
plot([Sn(x,N)],x=-6.3..6.3):p||N:=%:
display([g10,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-2*Pi..2*Pi,-1.2..1.2]);
```



У точках розриву функції $f(x)$ її ряд Фур'є збігається до півсуми лівої та правої граничних значень цієї функції. На прилеглих до розриву ділянках сума тригонометричного полінома порядку n дає помітні пульсації, причому амплітуда пульсацій не зменшується зі зростанням числа n — пульсації лише стискаються вздовж горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище, притаманне рядам Фур'є для будь-яких сигналів із розривами 1-го роду, називають *ефектом Гібса*.

◄

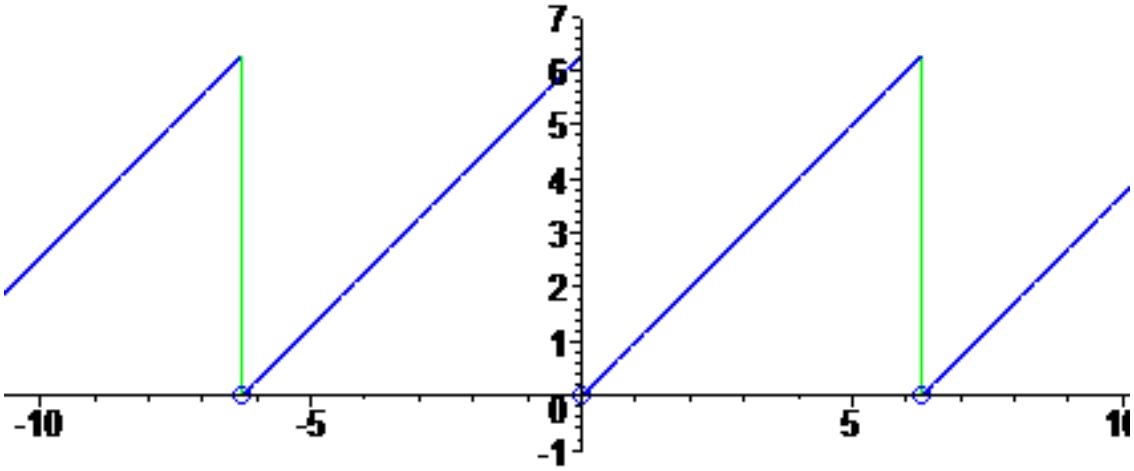
Приклад 2.4.3. Розвинути в ряд Фур'є $2\cdot\pi$-періодичну функцію $f(x)=x, 0<x\le 2\cdot\pi$.

Розв'язування.

Побудуємо графік цієї функції з використанням середовища Maple

```
restart:
with(plots):
with(plottools):
y:=x->x:
ddL:=[seq([2*Pi*k,t,t=0..2*Pi],k=-2..2)]:
```

```
p:=plot([y(x),ddL[]],x=0..2*Pi,style=[line],discont=tr
ue,thickness=[2,1$nops(ddL)],linestyle=[1,3$nops(ddL)]
,color=[blue,green$nops(ddL)],scaling=constrained):
p1:=plot([seq([[-2*Pi+2*Pi*k,0]],k=-2..3)[]],x=-
3*Pi..3*Pi,style=[point],symbol=circle,symbolsize=15,c
olor=blue,scaling=constrained):
display([p1,p, seq(translate(p, 2*k*Pi,0),k in [-2,-
1,1])],view=[-4*Pi..4*Pi,-1.0..7]);g10:=%:
```



Як указано в умові, на проміжку $(0, 2\cdot\pi]$ функція $f(x)$ задається одною формулою, а на проміжку $[-\pi, \pi]$ ця функція задається двома формулами

$$f(x)=\begin{cases} x+2\cdot\pi, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Тому для обчислення коефіцієнтів Фур'є зручніше використовувати формули (2.9)-(2.11) при $\alpha = 0$.

```
evaln(a[0])=(1/Pi)*Int(y(x),x=0..2*Pi);
a[k]=(1/Pi)*Int(y(x)*cos(k*x),x=0..2*Pi);
A:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*cos(k*x),x=0..2*Pi):
a[k]=A(y,k);# k=1,2,3,...
simplify(%) assuming k::posint;
ak:=unapply(rhs(%),k):
a[0]:=A(y,0);
```

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\,\pi} x\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\,\pi} x\cos(k\,x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2\,(-1+\cos(\pi\,k)^2+2\,\pi\,k\sin(\pi\,k)\cos(\pi\,k))}{\pi\,k^2}$$

$$a_k = 0$$

$$a_0 := 2\,\pi$$

```
b[k]=(2/Pi)*Int(y(x)*sin(k*x),x=0..2*Pi);
B:=(f,k)->(1/Pi)*int(f(x)*sin(k*x),x=0..2*Pi):
b[k]=B(y,k);# k=1,2,3,...
simplify(%) assuming k::posint;
bk:=unapply(rhs(%),k):
```

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(k\,x)\,dx$$

$$b_k = -\frac{2\,(-\sin(\pi\,k)\cos(\pi\,k) + 2\,\pi\,k\cos(\pi\,k)^2 - \pi\,k)}{\pi\,k^2}$$

$$b_k = -\frac{2}{k}$$

```
psi(x)=evaln(a[0])/2+Sum(a[k]*cos(k*x)+b[k]*sin(k*x),k
=1..infinity);
psi(x)=a[0]/2+Sum(ak(k)*cos(k*x)+bk(k)*sin(k*x),k=1..i
nfinity);
```

$$\psi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(k\,x)\right)\right)$$

$$\psi(x) = \pi + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2\sin(k\,x)}{k}\right)\right)$$

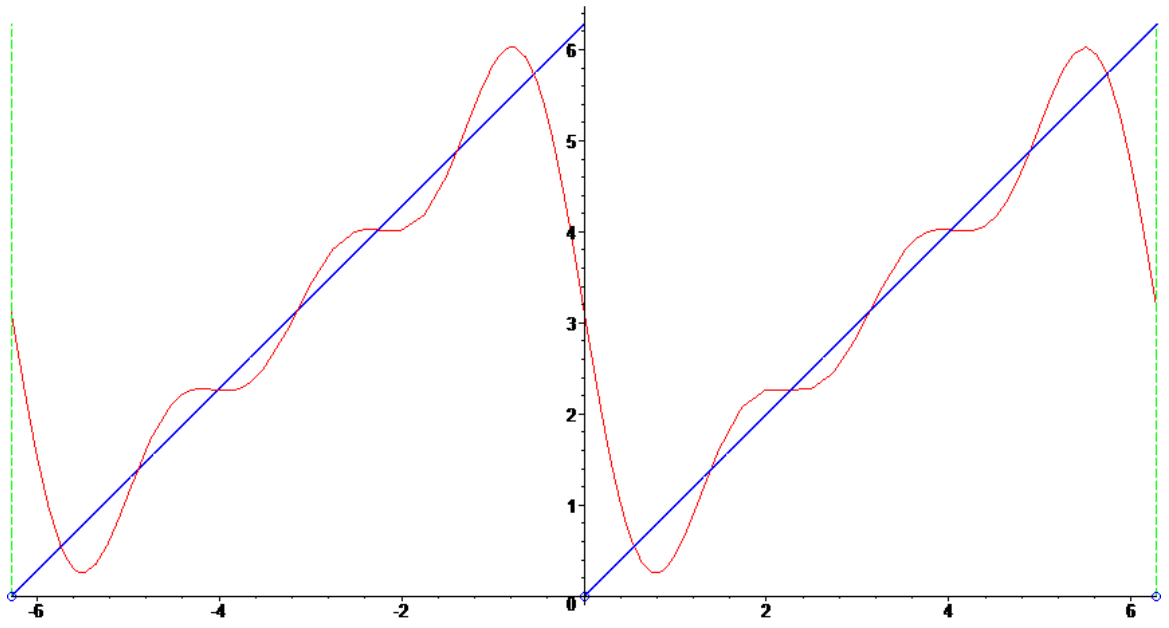
Створимо функцію для обчислення частинних сум ряду

```
subs(a[k]=ak(k),b[k]=bk(k),a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*x)+b[
k]*sin(k*x),k=1..n)):
Sn:=unapply(eval(%),[x,n]):
S[n]=Sn(x,n);
```

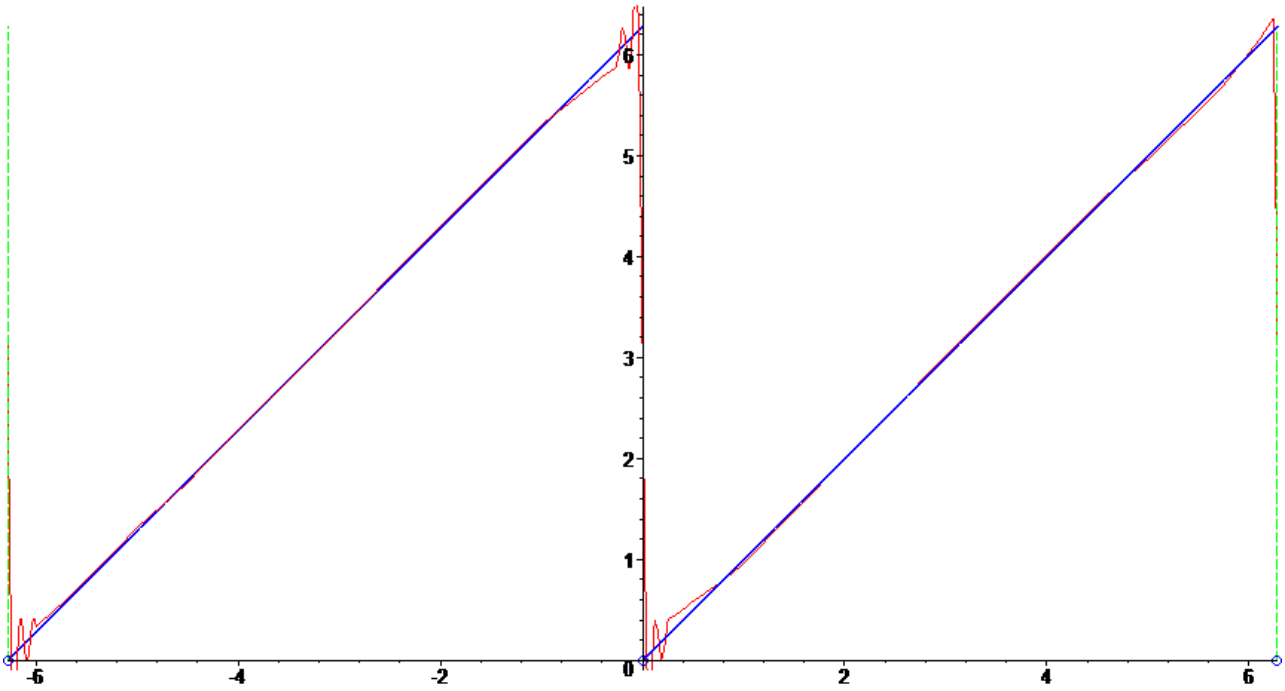
$$S_n = \pi + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2\sin(k\,x)}{k}\right)\right)$$

```
N:=3:S[N](x)=Sn(x,N);
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-2*Pi..2*Pi,-0.1..2*Pi+0.2]);
```

$$S_3(x) = \pi - 2\sin(x) - \sin(2\,x) - \frac{2}{3}\sin(3\,x)$$




```
N:=48:S[N](x)=Sn(x,N):
plot([Sn(x,N)],x=-12..12):p||N:=%:
display([p1,p,p||N, translate(p, 2*Pi,0), translate(p,
-2*Pi,0)],view=[-2*Pi..2*Pi,-0.1..2*Pi+0.2]);
```



Слід звернути увагу, що в точках розриву сума ряду Фур'є дорівнює частинній сумі ряду для довільного значення $n \geq 0$ $\psi\left(x = k \cdot \pi\right) = S_n\left(x = k \cdot \pi\right) = \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

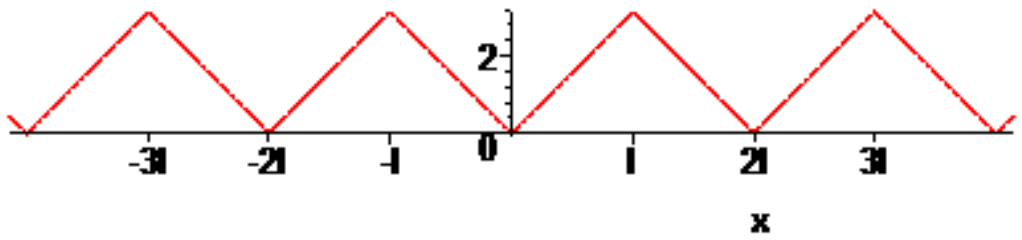
◀

Приклад 2.4.4. Розвинути в ряд Фур'є $2\cdot l$-періодичну функцію $f(x)=|x|, -l\le x\le l$.

Розв'язування.

Побудуємо графік цієї функції з використанням середовища Maple

```
restart:
seq([[t,t-2*k*Pi,t=2*k*Pi..2*k*Pi+Pi],[t,-
t+2*k*Pi,t=(2*k-1)*Pi..2*k*Pi]][],k=-2..2):
plot([%],x=-
13..13,scaling=constrained,color=[red],thickness=[2$no
ps([%])], tickmarks=[[-Pi="-l", -2*Pi="-2l", -3*Pi="-
3l",Pi="l", 2*Pi="2l", 3*Pi="3l"], default]);
```



Задана функція - парна, отже

$$S_{\infty}(x)=\pi+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(k\cdot x)}{k}.$$

```
b[k]=0;
a[0]:=2*Int(x,x=0..l)/l;
A:=k->(2/l)*int(x*cos(k*Pi*x/l),x=0..l):
a[k]=A(k); # k=1,2,3,...
a[k]=simplify(A(k)) assuming k:: posint;
```

$$b_k = 0$$

$$a_0 := \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx$$

$$a_k = \frac{2\,l\,(-1+\cos(k\,\pi)+\sin(k\,\pi)\,k\,\pi)}{k^2\,\pi^2}$$

$$a_k = \frac{2\,l\,(-1+(-1)^k)}{k^2\,\pi^2}$$

Формулу для обчислення коефіцієнтів можна ще раз спростити

$$a_k=-\frac{4\cdot l}{(2\cdot k-1)^2\cdot\pi^2},$$

тоді розвинення в ряд Фур'є має вигляд

```
abs(x)=a[0]/2-4*l/Pi^2*sum(cos((2*k-1)*Pi*x/l)/(2*k-
1)^''2'',k=1..5)+`...`;
```

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l\left(\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)}{3^{'2'}} + \frac{\cos\left(\frac{5\pi x}{l}\right)}{5^{'2'}} + \frac{\cos\left(\frac{7\pi x}{l}\right)}{7^{'2'}}\right)}{\pi^2} + \ldots$$

Слід зауважити, оскільки задана функція є неперервною на всій числовій осі, отриманий ряд Фур'є збігається до цієї функції при всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

Процес і результат розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)$ називають *гармонічним аналізом*. На практиці частіше доводиться мати справу з емпіричними функціями, заданими графічно чи таблично, або з доволі складними функціями, для яких неможливо аналітично визначити коефіцієнти Фур'є. В цьому випадку маємо справу з *практичним гармонічним аналізом*, сутність якого полягає в наближеному обчисленні відповідних визначених інтегралів. Розглянемо одну з типових задач практичного гармонічного аналізу.

◄

Приклад 2.4.5. Розвинути в ряд Фур'є періодичну з періодом *l*=6 функцію $f(x)$, задану таблицею

x	0.0	0.5	1.2	1.7	2.2	2.7	4.0	4.9	6.0
f (x)	0.0	2.5	4.3	2.6	1.5	4.0	8.0	9.5	5.0

Розв'язування.

Побудуємо з використанням середовища Maple апроксимацію табличної функції кубічним сплайном, що широко використовується під час розв'язання широкого кола практичних задач

```
restart:
interface(displayprecision=2):
 X:=[0.0, 0.5, 1.1, 1.7, 2.2, 2.7, 4.0, 4.9, 6.0]:
Y:=[0.0, 2.5, 4.4, 2.6, 1.5, 4.0, 7.5, 9.5, 4.0]:
spline(X,Y,x,cubic):y:=unapply(%,x):
f[s](x)=y(x);
```

$$f_s(x) = \begin{cases} 5.06\,x - 0.26\,x^3 & x < 0.50 \\ 0.06 + 4.87\,x - 0.39\,(x-0.50)^2 - 4.09\,(x-0.50)^3 & x < 1.10 \\ 4.41 - 0.01\,x - 7.74\,(x-1.10)^2 + 4.60\,(x-1.10)^3 & x < 1.70 \\ 9.97 - 4.34\,x + 0.53\,(x-1.70)^2 + 7.48\,(x-1.70)^3 & x < 2.20 \\ -2.47 + 1.81\,x + 11.75\,(x-2.20)^2 - 10.73\,(x-2.20)^3 & x < 2.70 \\ -10.88 + 5.51\,x - 4.34\,(x-2.70)^2 + 1.67\,(x-2.70)^3 & x < 4.00 \\ -3.27 + 2.69\,x + 2.17\,(x-4.00)^2 - 2.99\,(x-4.00)^3 & x < 4.90 \\ 12.78 - 0.67\,x - 5.90\,(x-4.90)^2 + 1.79\,(x-4.90)^3 & otherwise \end{cases}$$

Тут видно, що кубічний сплайн складається з окремих поліномів третього степеня на кожному проміжку. Виділимо деякі два суміжних проміжки і відповідні кубічні поліноми

```
x1:=1.7:x2:=2.2:x3:=2.7:
evalf(y(x)) assuming x>x1 and x<x2;P3_1:=unapply(%,x):
evalf(y(x)) assuming x>x2 and x<x3;P3_2:=unapply(%,x):
```

$$10.0 - 4.3\,x + 0.5\,(x-1.7)^2 + 7.5\,(x-1.7)^3$$
$$-2.5 + 1.8\,x + 11.8\,(x-2.2)^2 - 10.7\,(x-2.2)^3$$

та перевіримо умову неперервності побудованої сплайн-функції, а також її перших двох похідних у вузловій точці, що є спільною для цих проміжків

```
interface(displayprecision=1):
Limit(P3_1(x),x=x2,left)=limit(P3_1(x),x=x2,left);
Limit(P3_2(x),x=x2,right)=limit(P3_2(x),x=x2,right);
Limit(Diff(P3_1(x),x),x=x2,left)=limit(D(P3_1)(x),x=x2
,left);
Limit(Diff(P3_2(x),x),x=x2,right)=limit(D(P3_2)(x),x=x
2,right);
Limit(Diff(P3_1(x),x$2),x=x2,left)=limit(D[1$2](P3_1)(
x),x=x2,left);
Limit(Diff(P3_2(x),x$2),x=x2,right)=limit(D[1$2](P3_2)
(x),x=x2,right);
```

$$\lim_{x \to 2.2-} 10.0 - 4.3\,x + 0.5\,(x-1.7)^2 + 7.5\,(x-1.7)^3 = 1.5$$

$$\lim_{x \to 2.2+} -2.5 + 1.8\,x + 11.8\,(x-2.2)^2 - 10.7\,(x-2.2)^3 = 1.5$$

$$\lim_{x \to 2.2-} \frac{d}{dx}\left(10.0 - 4.3\,x + 0.5\,(x-1.7)^2 + 7.5\,(x-1.7)^3\right) = 1.8$$

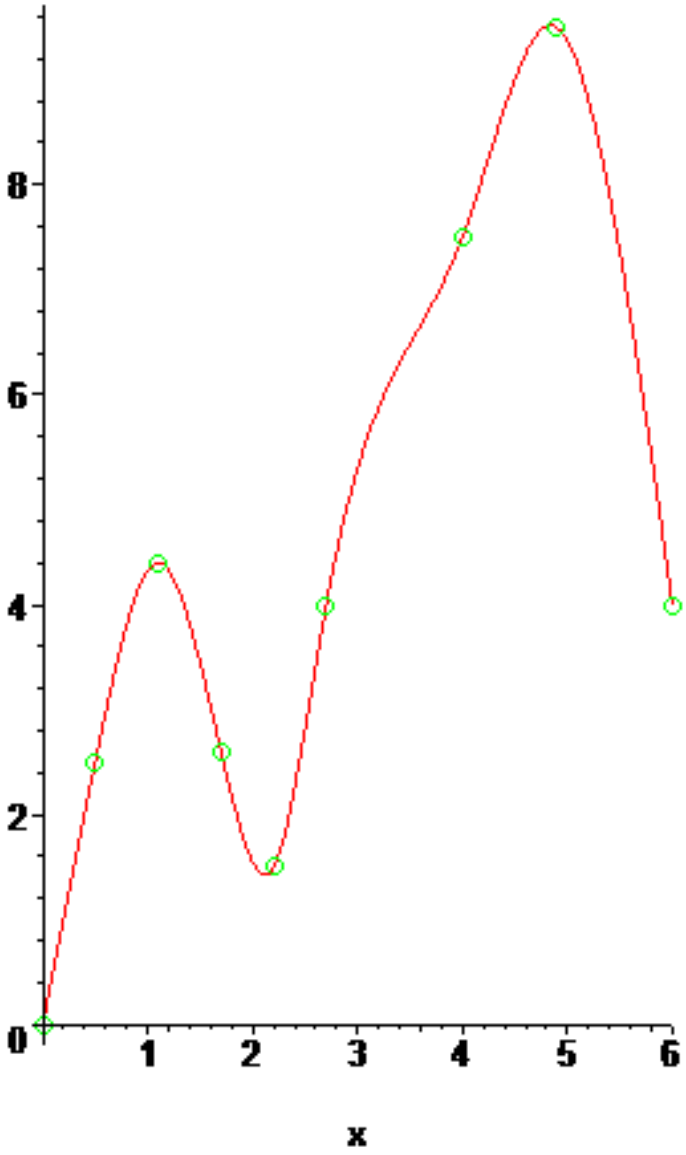
$$\lim_{x \to 2.2+} \frac{d}{dx}\left(-2.5 + 1.8\,x + 11.8\,(x-2.2)^2 - 10.7\,(x-2.2)^3\right) = 1.8$$

$$\lim_{x \to 2.2-} \frac{d^2}{dx^2}\left(10.0 - 4.3\,x + 0.5\,(x-1.7)^2 + 7.5\,(x-1.7)^3\right) = 23.5$$

$$\lim_{x \to 2.2+} \frac{d^2}{dx^2}(-2.5 + 1.8\,x + 11.8\,(x-2.2)^2 - 10.7\,(x-2.2)^3) = 23.5$$

Побудуємо графік:

```
XY:=zip((u,v)->[u,v],X,Y):
plot([XY,y(x)],x=X[1]..X[-
1],style=[point,line],symbol=circle,symbolsize=14,scal
ing=constrained);
```



На цьому графіку задані вузлові точки функції $f(x)$ позначені зеленими кружочками, а неперервна червона лінія є графіком апроксимуючої сплайн-функції $f_s(x)$.

Відповідно умови функція $f(x)$ задана на зміщеному відрізку довжиною в період *l*, отже на основі формул (2.9)-(2.11), (2.18)-(2.21),

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot l} f(x) \cdot dx\,.$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot l} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \cdot dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha+2\cdot l} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \cdot dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right).$$

де $\alpha = 0, l = 3$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є

```
l:=3:
A0:=int(y(x),x=0..2*l)/l;
simplify((1/l)*int(y(x)*cos(k*Pi*x/l),x=0..2*l))
assuming k:: posint:
A:=unapply(%,k):
simplify((1/l)*int(y(x)*sin(k*Pi*x/l),x=0..2*l))
assuming k:: posint:
B:=unapply(%,k):
 Sn:=(a0,a,b,l,x,n)-
```

Створимо функцію для обчислення частинних сум відповідного ряду

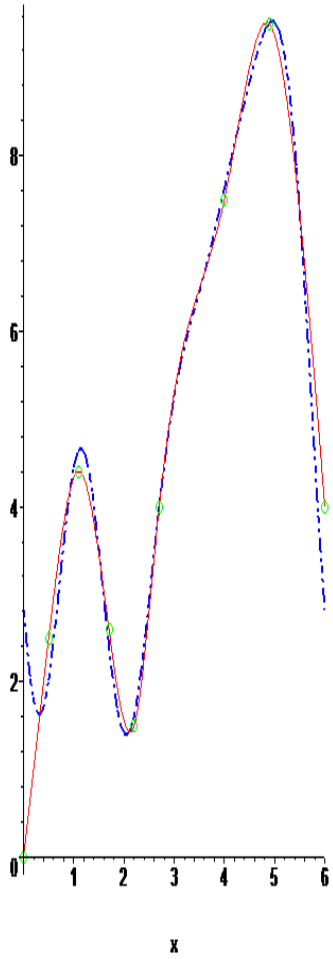
$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$$

```
a0/2+sum(a(k)*cos(k*Pi*x/l)+b(k)*sin(k*Pi*x/l),k=1..n)
:
```

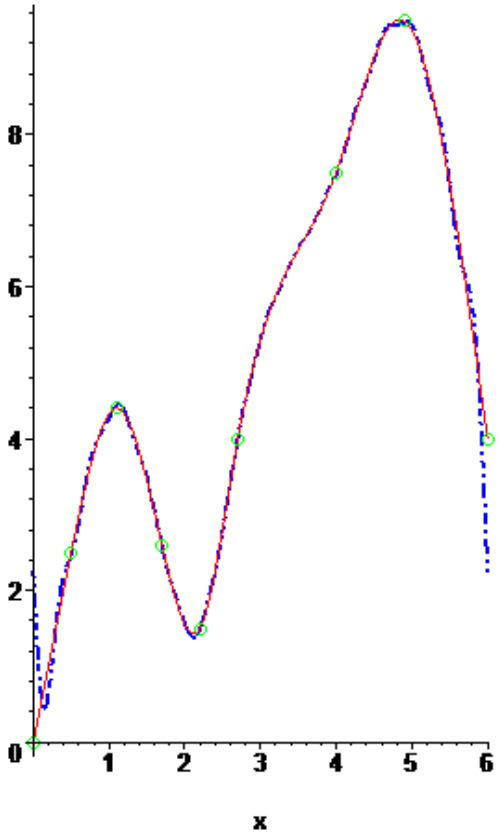
Продемонструємо результати порівняння графіків заданої функції з частинними сумами ряду Фур'є з різними значеннями $n = 4, n = 15, n = 60$. Зеленою пунктирною лінією показано графікі частинних сум

```
S[n]=Sn(A0,A,B,ll,x,4);
plot([XY,y(x),Sn(A0,A,B,ll,x,4)],x=X[1]..X[-
1],style=[point,line$2],symbol=circle,symbolsize=14,sc
aling=constrained,color=[green,red,blue],linestyle=[1$
2,4], thickness=[1,1,2]);
```

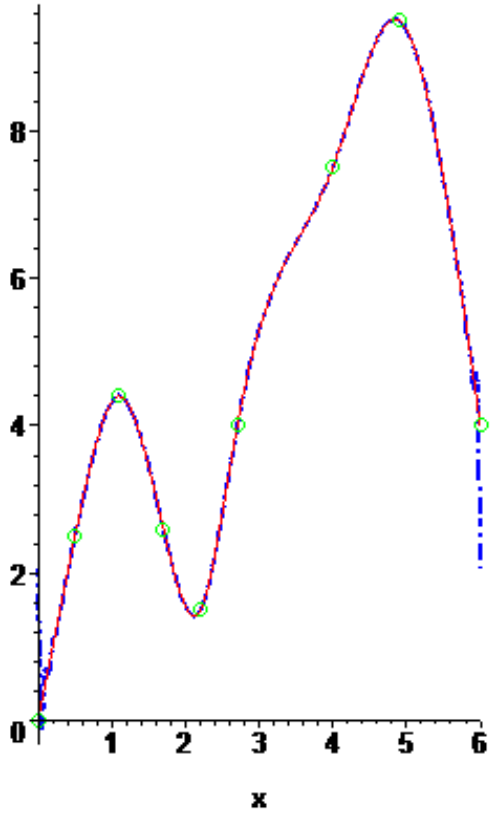
$$S_n = 5.2 + 0.0\cos(1.0\,x) - 3.3\sin(1.0\,x) - 1.1\cos(2.1\,x) - 0.1\sin(2.1\,x)$$
$$- 1.2\cos(3.1\,x) - 0.6\sin(3.1\,x) - 0.1\cos(4.2\,x) - 0.4\sin(4.2\,x)$$




```
plot([XY,y(x),Sn(A0,A,B,ll,x,15)],x=X[1]..X[-
1],style=[point,line$2],symbol=circle,symbolsize=14,sc
aling=constrained,color=[green,red,blue],linestyle=[1$
2,4], thickness=[1,1,2]);
```

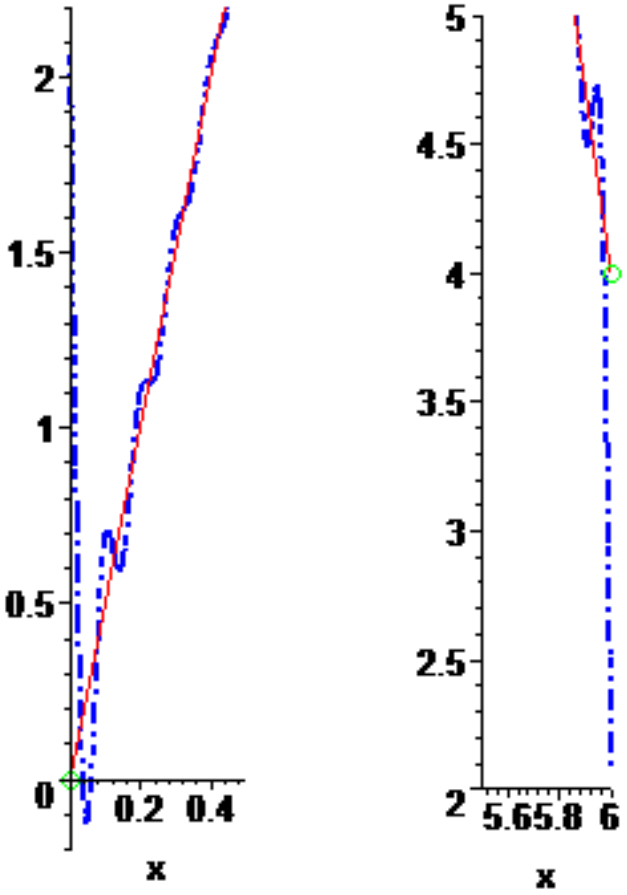



```
plot([XY,y(x),Sn(A0,A,B,ll,x,60)],x=X[1]..X[-
1],style=[point,line$2],symbol=circle,symbolsize=14,sc
aling=constrained,color=[green,red,blue],linestyle=[1$
2,4], thickness=[1,1,2]);
```



Як бачимо, в точках неперервності заданої функції точність частинних сум ряду Фур'є швидко зростає із збільшенням n. В точках розриву спостерігається чітко виражений ефект Гіббса.

```
plot([XY,y(x),Sn(A0,A,B,ll,x,60)],x=X[1]..0.5,-
0.2..2.2,style=[point,line$2],symbol=circle,symbolsize
=14,scaling=constrained,color=[green,red,blue],linesty
le=[1$2,4], thickness=[1,1,2]):g10:=%:
plot([XY,y(x),Sn(A0,A,B,ll,x,60)],x=6-
0.5..6,2..5,style=[point,line$2],symbol=circle,symbols
ize=14,scaling=constrained,color=[green,red,blue],line
style=[1$2,4], thickness=[1,1,2]):g20:=%:
g10;g20;
```



В багатьох випадках точне визначення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ стає неможливим. Це відбувається тоді, коли складний аналітичний вираз функції приводить до інтегралів, що "не беруться", а також коли функція задана за допомогою таблиці або графічно. У цих випадках значення коефіцієнтів Фур'є можуть бути знайдені лише наближено. Отже, зміст практичного гармонічного аналізу полягає в наближеному розвиненні функцій в ряди Фур'є.

◄

3. МЕТОД МОНТЕ –КАРЛО

3.1 Сутність метода Монте –Карло

Метод Монте-Карло - це загальна назва групи числових методів розв'язання математичних задач за допомогою моделювання випадкових величин.

Основною складовою частиною цих числових методів є задача моделювання випадкових величин. Одним з найпростіших механічних приладів для отримання випадкових величин є рулетка - основний атрибут казино. Місто Монте-Карло всесвітньо відоме своїми ігорними закладами – казино. З цим пов'язане походження назви відповідної групи числових методів розв'язання математичних задач.

Сутність метода Монте –Карло можна зрозуміти на основі одного з підходів до обчислення числа π. Цей підхід базується на одному з найпопулярніших застосувань методу Монте-Карло для обчислення площ плоских фігур. Як відомо, відношення площі кола радіуса R до площі квадрата, описаного навколо цього кола, дорівнює $\frac{\pi}{4}$, дійсно

$$\frac{S_c}{S_s} = \frac{\pi \cdot R^2}{(2 \cdot R)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Оскільке коло з описаним навколо нього квадратом є симетричною фігурою, достатньо розглянути лише чверть вказаної фігури при R=1, що зображена на рис. 3.1.

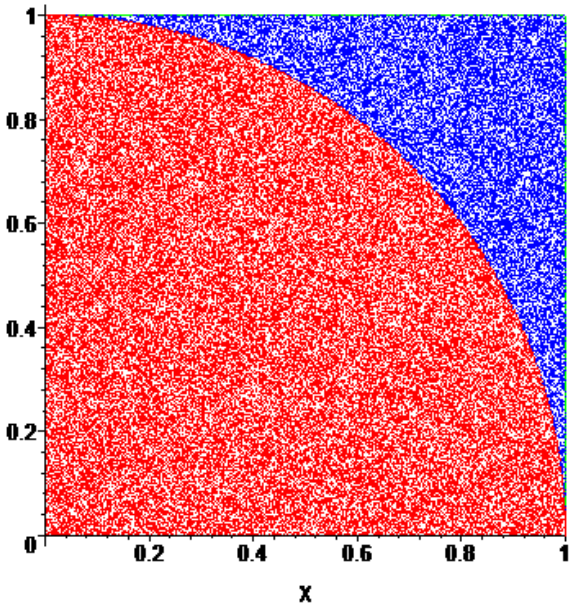


Рис. 3.1.

Припустимо, що ми рівномірно розкидали деякі об'єкти однакового розміру по всій площі квадрата, наприклад, зерна рису. Зерна рису, що попали в область круга, на рис. 3.1 зображено червоним кольором, а зерна,

що попали в область квадрата поза межі круга – синім. Кількість зерен, що попали в різні області має бути пропорційна площам відповідних фігур. Якщо підрахувати кількість червоних зерен і розділити на загальну кількість зерен в квадраті, тобто на суму червоних та синіх зерен, то отримаємо наближене значення відношення площ відповідних фігур, а саме число $\frac{\pi}{4}$. Якщо останнє число помножити на 4, отримаємо наближене значення числа π.

Тут слід звернути увагу на два важливих моменти.

1. Загальна кількість зерен має бути достатньо великою.
2. Зерна мають бути розподілені рівномірно

Якщо, принаймні, одна з цих умов не виконана, наближення буде поганим. Звичайно, на практиці таким способом користуватися незручно. Проте, якщо замінити розсіювання та підріхунок зерен комп'ютерними обчисленнями, метод стає незрівнянно більш зручним. Для створення математичної моделі описаного експеримента необхідно замінити зерна на точки $M_i(x_i, y_i)$, де x_i, y_i $(0 \le x_i \le 1, 0 \le y_i \le 1)$ – декартові координати. Для моделювання випадкового вибору значень координат в межах відповідних інтервалів необхідно мати спосіб отримання випадкових чисел. Звичайно замість випадкових чисел використовують псевдовипадкові числа, що можуть бути згенеровані за допомогою спеціальних програм. Для кожної таким способом згенерованої точки перевіряється умова $y_i \le \sqrt{1 - x_i^2}$. Всі точки квадрата на рис. 3.1., що задовольняють цій умові, попадають в область круга та зображені червоним кольором. Оскільки генерування координат кожної точки та перевірка вказаної умови здійснюється багаторазово, тому іноді метод Монте-Карло називають методом статистичних випробувань.

Метод Монте-Карло має дві важливі особливості. Перша особливість пов'язана з простою структурою обчислювального алгоритму. Звичайно, складається програма для здійснення одного випадкового випробування. В нашому прикладі це випробування полягає у виборі випадкової точки в квадраті та перевірці умови належності цієї точки області круга. Таке випробування проводиться *n* разів.

Метод Монте-Карло має дві важливі особливості. Перша особливість пов'язана з простою структурою обчислювального алгоритму. Звичайно, складається програма для здійснення одного випадкового випробування. В нашому прикладі це випробування полягає у виборі випадкової точки в квадраті та перевірці умови належності цієї точки області круга. Таке випробування незалежно один від одного проводиться *n* разів.

Друга особливість методу: в більшості випадків помилка обчислень пропорційна $\sqrt{D/n}$, де D - деяка стала, а n - число випробувань. З цієї формули видно: для того, щоб зменшити помилку, наприклад, в 10 разів

необхідно збільшити n (тобто обсяг обчислень) в 100 разів. При цьому у відповіді ми отримаємо лише ще один вірний десятковий знак.

Високої точності таким способом досягнути неможливо, тому метод Монте-Карло застосовують, звичайно, для розв'язання тих задач, що не потребують високої точності і для яких інші методи розв'язання неефективні.

До речі, на рис. 3.1 зображено $n = 10^5$ точок, з яких – 78563 червоних, отже, відповідно отриманим даним $\pi \approx 4 \cdot \frac{78563}{10^5} = 3.14252$ (більш точне значення $\pi \approx 3.14159$).

В той же час, одну й ту саму задачу можна розв'язувати різними варіантами методу Монте-Карло, яким відповідають різні значення D. У багатьох задачах вдається значно збільшити точність, за рахунок вибору моделі обчислень, якій відповідає значно менше значення D.

Різні моделі обчислень базуються на виборі різних моделей випадкових величин, яким присвячен наступний підрозділ.

3.2 Випадкові величини та їх моделювання

Одним з найважливіших понять теорії ймовірностей є поняття вмпадкової величини. Під випадковою величиною розуміється величина, що в результаті випробування з випадковими наслідками може набувати деяких можливих значень.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають дискретною. У противному разі її називають неперервною.

3.2.1 Дискретні випадкові величини

Надалі саму дискретну випадкову величину позначатимемо великими літерами, наприклад, *X*, а її можливі значення відповідними маленькими літерами *x*.

Дискретна випадкова величина визначається рядом розподілу

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}.$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ - можливі значення величини *X*, а $p_1, p_2, ..., p_n$ - відповідні їм ймовірності. Той факт, що ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення x_i дорівнює p_i позначатимемо через

$$P\{X = x_i\} = p_i, i = \overline{1,n}.$$

Ймовірності $p_1, p_2, ..., p_n$ в ряді розподілу мають задовольняти дві умови:

1) всі мають бути додатними:

$$p_i > 0;$$

2) сума всіх p_i дорівнює 1:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Математичним сподіванням $M[X]$ (або m_x) дискретної випадкової величини X називається число

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i . \qquad (3.2.1)$$

Якщо записати математичне сподівання у вигляді

$$M[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

стає зрозумілим його фізичний зміст – це середнє значення величини X з урахуванням вагових коефіцієнтів. Ваговими коефіцієнтами можливих значень x_i випадкової величини X слугують відповідні ймовірності p_i.

Серед основних властивостей математичного сподівання відмітимо такі. Нехай X, Y – будь-які випадкові величини, C - деяка невипадкова величина, тоді

$$M[C] = C,$$

$$M[X + C] = M[X] + C, \qquad (3.2.2)$$

$$M[C \cdot X] = C \cdot M[X], \qquad (3.2.3)$$

$$M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]. \qquad (3.2.4)$$

Якщо багаторазово спостерігати дискретну випадкову величину X, отримаємо деяку послідовність її значень $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$. Кожне із цих значень має дорівнювати одному із можливих значень $x_1, x_2, ..., x_n$. За умови $N >> n$ матимемо наближену рівність для середнього арифметичного реалізованих значень $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$

$$\frac{1}{N} \cdot (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_N) \approx M[X]$$

Точність цього наближення зростає із збільшенням N.

Дисперсією $D[X]$ випадкові величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її середнього значення $M[X]$

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X] \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M[X] \right)^2 \cdot p_i . \qquad (3.2.5)$$

Дисперсія $D[X]$ випадкові величини X характеризує розсіювання її значень навколо середнього $M[X]$.

З метою спрощення обчислення дисперсії формулу (3.2.5) можна перетворити на основі властивостей (3.2.2)÷ (3.2.4)

$$D[X]=M\left[X^2-2\cdot M[X]\cdot X+\left(M[X]\right)^2\right]=$$

$$=M\left[X^2\right]-2\cdot M[X]\cdot M[X]+\left(M[X]\right)^2,$$

Звідки

$$D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2. \qquad (3.2.6)$$

Властивості дисперсії:

$$D[C]=0, \qquad (3.2.7)$$

$$D[X]>0, \qquad (3.2.8)$$

$$D[X+C]=D[X], \qquad (3.2.9)$$

$$D[C\cdot X]=C^2\cdot D[X]. \qquad (3.2.10)$$

Важливу роль в теорії ймовірностей відіграє поняття незалежності випадкових величин. Випадкові величини *X, Y* називаються незалежними, якщо для будь-яких *x, y* справджується рівність

$$P\{X<x,Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}.$$

Для незалежних випадкових величин справедливі такі властивості

$$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y], \qquad (3.2.11)$$

$$D[X\pm Y]=D[X]+D[Y]. \qquad (3.2.12)$$

Дисперсія виражається в квадратах одиниці виміру випадкової величини *X*. Більш зручно використовувати середнє квадратичне відхилення, яке зазвичай позначають як σ_x або σ та обчислюють за формулою

$$\sigma_x=\sqrt{D}. \qquad (3.2.13)$$

Приклад 3.2.1. Розглянемо дві випадкові величини *X* та *Y*. Нехай випадкова величина *X* — це цифра, яка випала в результаті підкидання грального кубика. Випадкова величина *Y* — це цифра, яка випала в результаті підкидання монети, на одній стороні якої зображено цифру 3, а на іншій - 4.

Необхідно побудувати ряди розподілу випадкових величин *X* та *Y*, знайти відповідні математичне сподівання m_x, m_y, дисперсію $D[X], D[Y]$ та середньоквадратичне відхилення σ_x, σ_y. Інтерпретувати отримані результати.

Розв'язування.

Можливими реалізаціями випадкової величини *X* є цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поява будь-якої цифри – рівноймовірна, отже можемо побудувати ряд розподілу випадкової величини *X*

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6

$P = p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

За формулою (3.2.1) обчислимо математичне сподівання

$$m_x = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3.5,$$

за формулами (3.2.6), (3.2.13) – відповідно дисперсію

$$D[X] = M[X^2] - (m_x)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - (3.5)^2 \approx 2.917$$

та середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2.917} \approx 1.708.$$

Ряд розподілу випадкової величини Y

$X = x_i$	3	4
$P = p_i$	0.5	0.5

Математичне сподівання

$$m_y = \sum_{i=1}^{2} y_i \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3+4) = 3.5,$$

за формулами (3.2.6), (3.2.13) – відповідно дисперсію

$$D[Y] = M[Y^2] - (m_y)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (3^2 + 4^2) - (3.5)^2 = 0.25$$

та середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0.25} = 0.5.$$

Як бачимо, математичні сподівання обох величини співпадають: $m_x = m_y$, в той же час $\sigma_x < \sigma_y$. Це пов'язано з тим, що можливі значення випадкової величини Y можуть відрізнятися від математичного сподівання тільки на ± 0.5, в той час коли для випадкової величини X аналогічне відхилення може досягати ± 2.5. ◄

3.2.2 Неперервні випадкові величини

Випадкову величину X називатимемо неперервною, якщо вона може набувати будь-яке значення з інтервалу (a, b). Вказаний інтервал може бути і нескінченним.

Неперервна випадкова величина X визначається заданням інтервалу

(a, b), що містить можливі значення цієї величини, і функції $f(x)$, яка називається щільністю ймовірностей випадкової величини X (або щільністю розподілу X).

Фізичний зміст $f(x)$ такий: нехай (a', b') - довільний інтервал, що міститься в (a, b) (тобто $a \le a' < b' \le b$). Тоді ймовірність того, що X виявиться в інтервалі (a', b'), дорівнює інтегралу

$$P\{a' < X < b'\} = \int_{a'}^{b'} f(x) \cdot dx .$$

Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини X має задовольняти дві умови, що аналогічні відповідним умовам для дискретних випадкових величин:

1)

$$f(x) > 0;$$

2)

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot dx = 1 .$$

Математичним сподіванням $M[X]$ (або m_x) неперервної випадкової величини X називається число

$$M[X] = m_x = \int_{a}^{b} x \cdot f(x) \cdot dx .$$

Формули (3.2.2)÷ (3.2.4), (3.2.6)÷ (3.2.13) справедливі також для непрервних випадкових величин.

3.3 **Моделювання випадкових величин**

Задача моделювання випадкових величин є основною складовою частиною чисельного методу розв'язування математичних задач, який носить назву методу Монте –Карло. Цей підхід передбачає необхідність генерування послідовності вибіркових значень випадкової величини із заданим розподілом. Такий процес прийнято називати моделюванням випадкової величини. Для обчислення невідомої величини u необхідно побудувати випадкову величину X, математичне сподівання якої дорівнює u. Далі моделюємо проведення N випробувань, результатами яких є значення $x_1, x_2, ..., x_N$. Тоді на основі закону великих чисел матимемо

$$u \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Більш того, ми можемо дати оцінку точності такого наближення. Нехай $X_1, X_2, ..., X_N$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, і закон розподілу кожної з них збігається із законом розподілу випадкової

величини *X*, тоді при достатньо великих *N* згідно з центральною граничною теоремою випадкова величина

$$S_N \approx \sum_{i=1}^{N} X_i .$$

має закон розподілу близький до нормального з параметрами $N \cdot u$ і $N \cdot \sigma^2$, де σ^2 - дисперсія випадкової величини *X*. Тоді

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i - u\right| < \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{N}}\right\} \approx 2 \cdot \Phi(3) \approx 0.997 , \qquad (3.3.1)$$

де Φ(*z*) - функція Лапласа:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt .$$

Отримані результати слід інтерпретувати так: з імовірністю 0.997 можна стверджувати, що невідома величина *u* відрізняється від отриманого значення $\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$ не більше як на $\frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$.

Співвідношення (3.3.1) є надзвичайно важливим для методу Монте-Карло, оскільки дає нам не тільки метод розрахунку *u*, а й оцінку похибки.

Вихідною при моделюванні випадкових величин з відомим законом розподілу є рівномірно розподілена на відрізку [0;1] випадкова величина *U*, тобто випадкова величина із щільністю розподілу імовірності

$$f_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

До такого розподілу приходимо, якщо розглянемо випробування, результатом якого є вибір точки з відрізка [0;1], і вважатимемо, що для будь-яких *a* і *b* ($0 \le a < b \le 1$) імовірність того, що ця точка буде вибрана з відрізка [*a*; *b*], дорівнює *b*-*a*.

Отже, випадкова величина *U* буде змодельована, якщо буде вказано спосіб вибору навмання числа (спосіб генерування випадкового числа) з відрізка [0;1].

3.3.1 Генерування псевдовипадкових послідовностей

Випадкові послідовності можна розділити на два класи: істинно випадкові та псевдовипадкові. Випадкові послідовності, як правило, породжуються апаратними або комбінованими, програмно-апаратними засобами, які використовують як генеруючий пристрій датчики фізичних величин. Псевдовипадкові послідовності, як правило, генеруються програмно. Саме такі псевдовипадкові послідовності і використовуються

під час реалізації обчислень за методом Монте-Карло. Це зручно та економно. Основний недолік псевдовипадкових послідовностей полягає в їх періодичності. На сьогодні існують відносно прості формули, що надають можливість генерувати псевдовипадкові послідовності цілком придатні для розв'язання широкого кола задач методом Монте-Карло. Це означає, що згенеровані за вказанами формулами псевдовипадкові послідовності за багатьма тестами мають ті самі ознаки, що й істинно випадкові послідовності. Іншими словами псевдовипадкові послідовності можуть з успіхом імітувати істинно випадкові послідовності.

В усіх мовах програмування передбачено спеціальні команди для отримання псевдовипадкових послідовностй, що рівномірно розподілені на інтервалі (0, 1).

Функція **RAND()** в C++ - мові програмування високого рівня, реалізує обчислення за рекурентною формулою

$$x_{i+1} = (1103515245 \cdot x_i + 12345) \pmod{4294967296},$$

де запис $a \pmod{m}$ означає цілочисловий залишок від ділення цілих чисел $\frac{a}{m}$.

У довідковій інформації системи комп'ютерної математики Maple зазначається, що стандартна команда **rand()** у версіях Maple до 9.5 включно, базувалася на рекурентному співвідношенні

$$x_{i+1} = 427419669081 \cdot x_i \pmod{999999999989}. \qquad (3.3.2)$$

В подальших версіях Maple цей алгоритм покладено в основу команди GenerateInteger підпакета RandomTools[LinearCongruence].

Формула (3.3.2) призначена для генерування цілих чисел x_i, що рівноймовірно розташовані на відрізку [1; 999999999989]. Очевидно, що псевдовипадкова послідовність чисел $u_i = \frac{x_i}{10^{12}}$ або $u_i = \frac{x_i}{m+1} = \frac{x_i}{999999999990}$ буде рівноймовірно розподілена на інтервалі (0; 1).

Перевіримо, чи дійсно робота команди RandomTools[LinearCongruence] базується на використанні формули (3.3.2). Для цього запишемо невеликі фрагменти програмного коду з відповідними коментарями. Коментарі передбачено в самому тексті програми в рядках після знаку #.

```
restart:
# Підключаємо команду LinearCongruence
with(RandomTools[LinearCongruence]):
# Встановлюємо початкове значення змінної x[0] в
формулі (3.3.2)
x[0]:= 10;
# Встановлюємо таке саме початкове значення змінної
u[0] стандартними засобами Maple
SetState( state=x[0]);
```

```
# Надаємо незмінних значень сталим у формулі (3.3.2)
a:=427419669081;m:=999999999989;
# Надаємо незмінних значень сталим у формулі (3.3.2)
for k to 5 do
 x[k]:=x[k-1]*a mod m;
 print(''x''[k]=x[k],[x[k]-GenerateInteger()])
end do:
```

$$x_0 := 10$$

$$a := 427419669081$$

$$m := 999999999989$$

Реалізуємо обчислення безпосередньо за формулою (3.3.2) та перевіримо чи ті самі числа генеруються за допомогою команди *GenerateInteger()*

```
for k to 5 do
 x[k]:=x[k-1]*a mod m;
 print(''x''[k]=x[k],[x[k]-GenerateInteger()])
end do:
```

$$'x'_1 = 274196690854, [0]$$

$$'x'_2 = 211106932733, [0]$$

$$'x'_3 = 436330737003, [0]$$

$$'x'_4 = 742561435674, [0]$$

$$'x'_5 = 584587189815, [0]$$

Цифри «0» в квадратних дужках в кожному рядку свідчать про успішність зазначеної перевірки.

3.3.2 Моделювання дискретних випадкових величин

Найбільш важливими дискретними випадковими величинами є цілочислові з розподілом

$$p_i = P(X = i), \quad i = 0,1,2,...,$$

що задовольняє рекурентні формули:

$$p_{i+1} = p_i \cdot r(i). \tag{3.3.3}$$

Для таких випадкових величин обчислення p_i значно спрощується.

Приклад 3.3.1. Записати формулу (3.3.3) для біноміального розподілу з параметрами (p, n).

Розв'язування.

Для біноміального розподілу з параметрами (p, n) маємо

$$p_k = P\left(X = k\right) = C_n^k \cdot p^k \cdot \left(1-p\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!} \cdot p^k \cdot \left(1-p\right)^{n-k},$$

$$r\left(k\right) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_n^{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot \left(1-p\right)^{n-k-1}}{C_n^k \cdot p^k \cdot \left(1-p\right)^{n-k}} = \frac{C_n^{k+1} \cdot p}{C_n^k \cdot \left(1-p\right)} =$$

$$= \frac{\overline{\frac{n!}{\left(k+1\right)!\cdot\left(n-k-1\right)!}}}{\overline{\frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}}} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}; \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отже,

$$p_0 = \left(1-p\right)^n,$$

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{3.3.4}$$

◀

Приклад 3.3.2. Записати формулу (3.3.3) для розподілу Пуассона з параметром λ.

Розв'язування.

Для розподілу Пуассона з параметром λ маємо

$$p_k = P\left(X = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$r\left(k\right) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\overline{\frac{\lambda^{k+1}}{\left(k+1\right)!} \cdot e^{-\lambda}}}{\overline{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}} = \frac{\lambda}{\left(k+1\right)}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отже,

$$p_0 = e^{-\lambda},$$

$$p_{k+1} = p_k \cdot \frac{\lambda}{\left(k+1\right)}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

◀

Приклад 3.3.3. Записати формулу (3.3.3) для геометричного розподілу з параметром p.

Розв'язування.

Для геометричного розподілу Пуассона з параметром p маємо

$$p_k = P\left(X = k\right) = p \cdot \left(1-p\right)^k,$$

$$r\left(k\right) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{p \cdot \left(1-p\right)^{k+1}}{p \cdot \left(1-p\right)^k} = \left(1-p\right), \quad k = 0,1,...$$

Отже,

$$p_0 = p,$$
$$p_{k+1} = p_k \cdot (1-p), \quad k = 0,1,\ldots. \qquad \blacktriangleleft$$

Подамо результати моделювання біноміального розподілу випадкових величин за допомогою середовища системи Maple. Для цього створено спеціальну програму.

```
restart:
with(linalg):
Bn:=proc(p,n,ac)#Ряд розподілу для повторних незалежних
випробувань - формула Бернулі
local pi_1,pi,i,j,k,Rn,p1;
interface(displayprecision=ac);
 pi_1:=evalf((1-p)^n):Rn:=matrix(2,n+2,[[x[k],$
0..n],[P(X=x[k]),pi_1]]):
 p1:=p/(1-p):
for j to n do
  pi:=evalf(pi_1*(n-j+1)*p1/j);
  pi_1:=pi;Rn[2,j+2]:=pi_1
 end do:
 evalm(Rn)
 end proc:
with(linalg):

SM_:=proc(p,n,ac,_N,Bern)
local Rn,Sni,k,ki,i,Vn,s,j,Vnk;
Bern(p,n,ac):Rn:=%:
Sni:=matrix(3,n+2,[[Rn[1,k]$ k=1..n+2],[Rn[2,k]$
k=1..n+2],[Sum(P[k]),seq(sum(Rn[2,k],k=2..ki),ki=2..n+2)]]):
#print(evalm(Sni));
Vn:=matrix(2,n+2,[[x[k],$ 0..n],[Sum(N[k]),0$(n+1)]]):
i:='i':
for i to _N do
 s:=evalf(rand()/999999999990);
 for j from 2 while s>=Sni[3,j] do end do;
  Vn[2,j]:=Vn[2,j]+1;
 end do:
Vnk:=stackmatrix(row(Sni,1..2),row(Vn,2),row(Vn,2)):
Vnk[4,1]:=Sum(N[k])/N:N=_N;
for i from 2 to n+2 do Vnk[4,i]:=evalf(row(Vn,2)[i]/_N) end
do:
print(N=_N);
evalm(Vnk)
end proc:
```

Обчислення ряду розподілу для повторних незалежних випробувань реалізовано за формулами (3.3.4).

Приклад 3.3.4. Скласти ряд розподілу та здійснити моделювання біноміального розподілу випадкових величин за такими даними:

а) параметри розподілу: n = 5, p = 0.25, число випробувань N=30.

б) параметри розподілу: n = 5, p = 0.25, число випробувань $N=30\cdot10^4$.

в) параметри розподілу: n = 6, p = 0.5, число випробувань N=60.

г) параметри розподілу: n = 6, p = 0.5, число випробувань $N=20\cdot10^5$.

Розв'язування.

а) `SM_(0.25,5,3,30,Bn);`

$$N = 30$$

$$\begin{bmatrix} x_k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(X = x_k) & 0.237 & 0.396 & 0.264 & 0.088 & 0.015 & 0.001 \\ \sum N_k & 6 & 12 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\sum N_k}{N} & 0.200 & 0.400 & 0.333 & 0.033 & 0.033 & 0.000 \end{bmatrix},$$

де $\sum N_k$ - число появ відповідної події; $\frac{\sum N_k}{N}$ - відносна частота появи відповідної події.

б) `SM_(0.25,5,3,30*10^4,Bn);`

$$N = 300000$$

$$\begin{bmatrix} x_k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(X = x_k) & 0.237 & 0.396 & 0.264 & 0.088 & 0.015 & 0.001 \\ \sum N_k & 71241 & 118555 & 79177 & 26332 & 4407 & 288 \\ \frac{\sum N_k}{N} & 0.237 & 0.395 & 0.264 & 0.088 & 0.015 & 0.001 \end{bmatrix};$$

в) `SM_(0.5,6,3,60,Bn);`

$$N = 60$$

$$\begin{bmatrix} x_k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{P}(X=x_k) & 0.016 & 0.094 & 0.234 & 0.313 & 0.234 & 0.094 & 0.016 \\ \sum N_k & 0 & 5 & 6 & 23 & 21 & 3 & 2 \\ \dfrac{\sum N_k}{N} & 0.000 & 0.083 & 0.100 & 0.383 & 0.350 & 0.050 & 0.033 \end{bmatrix};$$

г) **SM_(0.5,6,3,20*10^5,Bn);**

$$N=2000000$$

$$\begin{bmatrix} x_k, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \mathrm{P}(X=x_k), & 0.016, & 0.094, & 0.234, & 0.313, & 0.234, & 0.094, & 0.016 \\ \sum N_k, & 31094, & 187209, & 468218, & 626114, & 468169, & 187851, & 31345 \\ \dfrac{\sum N_k}{N}, & 0.016, & 0.094, & 0.234, & 0.313, & 0.234, & 0.094, & 0.016 \end{bmatrix}.$$

Порівняння результатів, що отримані за умовами пунктів а) і б) та в) і г) наочно демонструє, що при збільшенні числа вибробувань частота появи подій наближається до відповідних імовірностей. ◄

3.3.3 Моделювання неперервних випадкових величин

Нехай маємо неперервну випадкову величину X з щільністю розподілу $f(x)$. Будемо вважати, що $f(x)>0$ на деякому проміжку (скінченному чи нескінченному) і $f(x)=0$ поза ним. На такому проміжку функція розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини буде зростати, отже, є оберненою. Якщо позначити через $F^{-1}(x)$ функцію обернену до $F(x)$ на вказаному проміжку, то на ньому

$$F\left(F^{-1}\left(x\right)\right)=F^{-1}\left(F\left(x\right)\right)=x,$$

Розглянемо випадкову величину $F(x)$. Оскільки для всіх x $0\le F\left(x\right)\le 1$, то якого б значення x не набула випадкова величина X, значення випадкової величини $F(X)$ належать відрізку [0; 1]. А отже, її функція розподілу має вигляд

$$F\left(X\right)=P\left\{F\left(X\right)<x\right\}=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ P\left(X<F^{-1}\left(x\right)\right), & 0<x\le 1= \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ F\left(F^{-1}\left(x\right)\right), & 0<x\le 1= \\ 1, & x>1 \end{cases}\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1, \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

тобто випадкова величина $F(X)$ рівномірно розподілена на відрізку [0; 1].

Якщо випадкова величина X має щільність розподілу імовірності $f(x)$ і функцію розподілу F(x), то випадкова величина

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt$$

рівномірно розподілена на відрізку [0; 1], і якщо u - значення випадкової величини U, що рівномірно розподілена на (0; 1), то корінь рівняння

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt = u \qquad (3.3.5)$$

є значенням випадкової величини X.

Саме цей факт і є основним при моделювані неперервних випадкових величин.

Приклад 3.3.5. Випадкова величина X називається рівномірно розподіленою на проміжку (a, b), якщо її щільність $f(x)$ є сталою на цьому інтервалі, а поза ним дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}.$$

Знайти формулу, для генерування значень випадкової величини X.

Розв'язування.

Для генерування значень випадкової величини X, складемо рівняння (3.3.5):

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}\cdot dt = u,\ a<x<b \quad .$$

Звідки легко знаходимо

$$\frac{x-a}{b-a}=u,\ a<x<b$$

або

$$x=a+u\cdot(b-a),\ 0<u<1. \qquad \blacktriangleleft$$

Приклад 3.3.6. Нехай випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$, тобто її щільність розподілу імовірності має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Знайти формулу, для генерування значень випадкової величини X.

Розв'язування.

Для генерування значень випадкової величини X, складемо рівняння (3.3.5):

$$\int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = u,\ x \geq 0$$

або

$$1 - e^{-\lambda \cdot x} = u,\ x \geq 0.$$

Звідси

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u),\ 0 < u < 1.$$

Легко довести, що випадкова величина $1-U$ має такий самий розподіл як і випадкова величина U, отже, останню формулу можна записати у вигляді

$$x = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(u), \quad 0 < u < 1. \tag{3.3.6}$$

◀

Розглянутий спосіб моделювання випадкової величини на основі співвідношення (3.3.5) непридатний при моделюванні випадкових величин з нормальним розподілом. Дійсно для випадкової величини X, що має стандартний нормальний розподіл з параметрами ($m_x = 0, \sigma = 1$), на основі (3.3.5), може бути отримано співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = u,$$

з нескінченим інтервалом можливих значень x та відсутністю розв'язку в явному вигляді.

Система Maple має стандартні команди для генерування випадкових величини, що розподілені за будь-яким із відомих розподілів. Доступ до цих команд відбувається після підключення піпакету *with(stats,random)*.

Приклад 3.3.7. Згенерувати 30 значень випадкової величина X, що має стандартний нормальний розподіл

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Розв'язування.

Застосуємо систему Maple.

```
restart:
with(stats,random):
stats[random, normald](30);
```

```
1.275676034, 0.4761860895, -2.620054215, 0.8547207946, -1.089001803,
    0.7165427609, -0.02996436194, 1.330855643, -1.296345120,
    -0.4703304005, -0.7122630822, -0.08717900722, 1.282253011,
    -1.683720684, 0.3265473243, 0.08179818206, 0.2127564698,
    -0.7279468705, 0.6855773713, -0.3760280547, -0.8074455431,
    0.5638425492, 0.7668276240, -0.9578304704, 0.09625284223,
    -0.5899328336, 0.8199273969, 1.522884873, -0.2965618595,
    -0.7531006388
```

◀

На основі випадкової величини X, що має стандартний нормальний розподіл, легко отримати будь-яку іншу нормально розподілену величину X' з параметрами m_x, σ:

$$X' = m_x + \sigma_x \cdot X \ . \qquad (3.3.7)$$

Приклад 3.3.8. Згенерувати 30 значень випадкової величина X, що має нормальний розподіл з параметрами $m_x = 20, \sigma = 2$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Розв'язування.

Застосуємо систему Maple.

```
restart:
with(stats,random):
stats[random, normald[20,2]](30);
 22.55135207, 20.95237218, 14.75989157, 21.70944159, 17.82199639,
    21.43308552, 19.94007128, 22.66171129, 17.40730976, 19.05933920,
    18.57547384, 19.82564199, 22.56450602, 16.63255863, 20.65309465,
    20.16359636, 20.42551294, 18.54410626, 21.37115474, 19.24794389,
    18.38510891, 21.12768510, 21.53365525, 18.08433906, 20.19250568,
    18.82013433, 21.63985479, 23.04576975, 19.40687628, 18.49379872
```

Той самий результат отримаємо, якщо спочатку згенеруємо випадкову величину X, що має стандартний нормальний розподіл та скористаємося співвідношенням (3.3.7):

```
restart:
with(stats,random):
stats[random, normald](30):
m[x]:=20:sigma[x]:=2:
map(zz->m[x]+sigma[x]*zz,[%%%]);
 [22.55135207, 20.95237218, 14.75989157, 21.70944159, 17.82199639,
    21.43308552, 19.94007128, 22.66171129, 17.40730976, 19.05933920,
    18.57547384, 19.82564199, 22.56450602, 16.63255863, 20.65309465,
    20.16359636, 20.42551294, 18.54410626, 21.37115474, 19.24794389,
    18.38510891, 21.12768510, 21.53365525, 18.08433906, 20.19250568,
    18.82013433, 21.63985479, 23.04576975, 19.40687628, 18.49379872
    ]
```

3.4 Розв'язання прикладних задач

3.4.1 Наближене знаходження визначених інтегралів

Метод Монте–Карло за своєю сутністю є методом наближеного інтегрування. Справді, якщо необхідно обчислити

$$I = \int_a^b \varphi(t) \cdot dt, \tag{3.4.1}$$

то вибирають таку випадкову величину *X*, математичне сподівання якої дорівнює *I*. Генерують випадкові значення цієї випадкової величини та знаходять середнє арифметичне можливих значень

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

і приймають x за наближене значення шуканого інтеграла

$$I \approx \overline{x}. \tag{3.4.2}$$

При виборі випадкової величини *X* із заданою щільністю *f*(*x*) такою, що для всіх $x \in [a; b]$ $f(x) > 0$ інтеграл (3.4.1) подаємо у вигляді

$$I = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{f(t)} \cdot f(t) \cdot dt, \tag{3.4.3}$$

та моделюємо випадкову величину

$$Y = \frac{\varphi(t)}{f(t)}.$$

Якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ — можливі значення випадкової величини *X*, то

$$I \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)}. \tag{3.4.4}$$

До того ж, згідно з центральною граничною теоремою

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi(x_i)}{f(x_i)} - I\right| < 3 \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0.997, \tag{3.4.5}$$

де $\sigma_y = \sqrt{\frac{\varphi(x)}{f(x)}}$.

Очевидно, що дисперсія, а, отже, і оцінка похибки формули (3.4.2) залежать від вибору випадкової величини *X*. Дійсно,

$$D[Y] = M\left[Y^2\right] - I^2 = \int_a^b \frac{\varphi^2(t)}{f(t)} \cdot dt - I^2.$$

Відомо, що цей вираз буде мінімальним за умови коли $f(t)$ пропорційна $|\varphi(t)|$.

В той же час вибір надто складних функцій $f(t)$ пов'язаний з ускладненням моделювання окремих значень випадкової величини *X*, тобто із збільшенням обчислень. Отже, в загальному випадку, вибір функцій $f(t)$ має бути обгрунтованим.

На практиці однократні інтеграли виду (3.4.1) методом Монте-Карло не обчислюють: для цього існують більш точні методи, що полягають у використанні квадратурних формул. В той же час при переході до багатократних інтегралів ситуація різко змінюється: квадратурні формули стають надто складними, а метод Монте-Карло залишається майже без змін.

Приклад 3.4.1. Обчислити наближено методом Монте-Карло інтеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot dt.$$

Використати три різних функції

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{\pi}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{8 \cdot x}{\pi^2}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^3, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$

де c_1, c_2 – деякі сталі.

Оцінити похибку отриманих результатів та порівняти їх з точним значенням заданого інтеграла.

Розв'язування.

Точне значення заданого інтеграла можемо легко обчисли за формулою Ньютона-Лейбніца

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\cdot dt=-\cos(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Далі застосовуватимемо формули (3.4.3), (3.4.4).

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot dt=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cdot\sin(t)\cdot dt=$$

$$a)\quad=\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{2}\cdot u,\ dt=\frac{\pi}{2}\cdot du\\ t=0\Rightarrow u=0;\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1\end{array}\right]=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u\right)\cdot du.$$

Якщо $u_1,u_2,...,u_n$ — можливі значення рівномірно розподіленої на проміжку (0; 1) випадкової величини U, то

$$\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_1\right),\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_2\right),...,\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_n\right),$$

і

$$I\approx I_N=\frac{\pi}{2\cdot N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_i\right).$$

Обчислення здійснюватимемо за допомогою системи Maple.

```
restart:
st:=time():
N:=1*10^5:
In:=0:
for i to N do
In:=In+evalf(sin(Pi/2*rand()/999999999990))
end do:
I=evalf(Pi/(2*N)*In);
time()-st;
```

$$I=0.9997905756$$

3.140

б) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{\frac{8\cdot t}{\pi^2}}\cdot\frac{8\cdot t}{\pi^2}\cdot dt=\frac{\pi^2}{8}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{t}\cdot\frac{8\cdot t}{\pi^2}\cdot dt=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u}, u=\frac{4}{\pi^2}\cdot t^2, du=\frac{8\cdot t}{\pi^2}\cdot dt \\ t=0\Rightarrow u=0; t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1 \end{array}\right]=\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\cdot du\,.$$

Якщо $u_1,u_2,...,u_n$ — можливі значення рівномірно розподіленої на проміжку (0; 1) випадкової величини U, то

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_1}\right)}{\sqrt{u_1}},\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_2}\right)}{\sqrt{u_2}},...,\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_n}\right)}{\sqrt{u_n}},$$

і

$$I\approx I_N=\frac{\pi}{4\cdot N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_i}\right)}{\sqrt{u_i}}.$$

де u – випадкова величина, що рівномірно розподілена на проміжку (0; 1).

Обчислення здійснюватимемо за допомогою системи Maple.

```
restart:
st:=time():
N:=10^5:
In:=0:
for i to N do
 rand()/999999999990;xi:=evalf(sqrt(%)):
 In:=In+evalf(sin(Pi/2*xi)/xi)
end do:
I=evalf(Pi/(4*N)*In);
time()-st;
```

$I = 1.000095623$

11.532

в) Коефіцієнти c_1,c_2 знайдемо на основі складання та розв'язання системи двох лінійних рівнянь. Проводитимемо обчислення в середовищі системи Maple.

```
printf(`Створимо функцію`);
f1:=(a,b,x)->a*x+b*x^3;
```

```
printf(` Із властивості функції щільності імовірності маємо`);
Int(f1(c[1],c[2],t),t=0..Pi/2)=1;
printf(` або`);
int(f1(c[1],c[2],t),t=0..Pi/2)=1;
printf(` Умова співпадання значення створеної функції із функцією sin(x) при x=`);Pi/2;
f1(c[1],c[2],Pi/2)=1;
printf(` Знайдемо розв'язок отриманої системи двох лінійних рівнянь`);
solve({%%,%},{c[1],c[2]});
printf(` Запишемо функцію щільності імовірності `);
subs(%,f1(c[1],c[2],t)):
f:=unapply(%,t):f=f(t);
int(y4(t),t=0..x)=u;
isolate(%,x);
```

Створимо функцію

$$f1 := (a, b, x) \to a\,x + b\,x^3$$

Із властивості функції щільності імовірності маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} c_1\,t + c_2\,t^3\,dt = 1$$

або

$$\frac{1}{8}\,c_1\,\pi^2 + \frac{1}{64}\,c_2\,\pi^4 = 1$$

Умова співпадання значення створеної функції із функцією sin(x) при x=

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\,c_1\,\pi + \frac{1}{8}\,c_2\,\pi^3 = 1$$

Знайдемо розв'язок отриманої системи двох лінійних рівнянь

$$\{c_1 = -\frac{2\,(\pi - 8)}{\pi^2}, c_2 = \frac{16\,(\pi - 4)}{\pi^4}\}$$

Запишемо функцію щільності імовірності

$$f = -\frac{2\,(\pi - 8)\,t}{\pi^2} + \frac{16\,(\pi - 4)\,t^3}{\pi^4}$$

Отже, можемо записати

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin(t)}{\frac{2\cdot t}{\pi^2}\cdot\left(8-\pi+\frac{8\cdot(\pi-4)}{\pi^2}\cdot t^2\right)}\right]\cdot\frac{2\cdot t}{\pi^2}\cdot\left(8-\pi+\frac{8\cdot(\pi-4)}{\pi^2}\cdot t^2\right)\cdot dt\,.$$

На основі (3.3.5) отримаємо формулу для моделювання випадкової величини *y*. Здійснюватимемо обчислення в Maple.

```
Int(f(t),t=0..y)=int(f(t),t=0..y);
rhs(%)=u;
isolate(%,y);
```

$$\int_0^y -\frac{2(\pi-8)t}{\pi^2}+\frac{16(\pi-4)t^3}{\pi^4}\,dt=-\frac{(\pi-8)y^2}{\pi^2}+\frac{4(\pi-4)y^4}{\pi^4}$$

$$-\frac{(\pi-8)y^2}{\pi^2}+\frac{4(\pi-4)y^4}{\pi^4}=u$$

$$y=\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\frac{-8\pi^2+\pi^3+\sqrt{64\pi^4-16\pi^5+\pi^6+16u\pi^5-64u\pi^4}}{-\pi+4}}}{4}$$

Після елементарних спрощень, отримаємо

$$y=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{8-\pi-\sqrt{\pi^2+16\cdot(\pi-4)\cdot(u-1)}}{4-\pi}}\,.$$

і формула (3.4.4) набуває такого вигляду

$$I\approx I_N=\frac{\pi^2}{2\cdot N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin(y_i)}{y_i\cdot\left(8-\pi-\frac{8\cdot(4-\pi)}{\pi^2}\cdot y_i^2\right)},$$

де

$$y_i=\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{8-\pi-\sqrt{\pi^2+16\cdot(\pi-4)\cdot(u_i-1)}}{4-\pi}}\,.$$

Здійснюватимемо обчислення в середовищі Maple.

```
restart:
st:=time():
N:=10^5:
In:=0:
for i to N do
 rand()/999999999990;
xi:=evalf(1/4*2^(1/2)*Pi*((8-Pi-(Pi^2+('16')*(Pi-
4)*(%-1))^(1/2))/(4-Pi))^(1/2)):
 In:=In+evalf(sin(xi)/(xi*(8-Pi+xi^2*8*(Pi-4)/Pi^2)))
end do:
```

```
I=evalf(Pi^2/(2*N)*In);
time()-st;
```

$$I = 0.9999995557$$

6.781

Відповідно формулі (3.4.5) абсолютна помилка обчислення інтеграла за формулою (3.4.4) з імовірністю 0.997 не може перевищити $\frac{3\cdot\sigma_y}{\sqrt{N}}$. Насправді, в більшості випадків ця помилка помітно менше цієї величини. Тому для характеристики похибки на практиці часто використовується інша величина – імовірна величина

$$\delta_{pr} = \frac{0.675\cdot\sigma_y}{\sqrt{N}}.$$

Фактична абсолютна помилка залежить від використаних під час обчислень випадкових чисел і може виявитися як в 2-3 рази більше, так і в кілька разів менше, ніж δ_{pr}. Так що δ_{pr} дає нам не межу помилки, а тільки її порядок.

Під час обчислення I_N, для тих самих значень випадкових величини можна наближено обчислити середнє квадратичне відхилення σ_y для кожного із способів розрахунку.

$$а)\ \sigma_y^2 \approx \frac{\pi^2}{4\cdot(N-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_i\right)-\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot u_i\right)\right]^2\right).$$

$$б)\ \sigma_y^2 \approx \frac{\pi^4}{64\cdot(N-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_i}\right)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_i}}\right)^2-\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_i}\right)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{u_i}}\right]^2\right).$$

$$в)\ \sigma_y^2 \approx \frac{\pi^4}{4\cdot(N-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t_i\right)}{t_i^2\cdot\left(8-\pi-\frac{8\cdot(4-\pi)}{\pi^2}\cdot t_i^2\right)^2}-\cdot\right.$$

$$\left.-\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t_i\right)}{t_i\cdot\left(8-\pi-\frac{8\cdot(4-\pi)}{\pi^2}\cdot t_i^2\right)}\right]^2\right),$$

$$t_i = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{8-\pi-\sqrt{\pi^2-16\cdot(\pi-4)\cdot(1-u_i)}}{4-\pi}} \quad .$$

Результати розрахунків зведено в табл.

Табл.

N	Метод	I_N	σ_y^2	δ_{pr}	$\delta_{ae}=$ $=\lvert I-I_N\rvert$	Тривалість обчислень, сек
10	*а*	1.0241693	0.24310	0.10524	0.02417	0
	б	0.99241	0.001870	0.02919	0.00759	0
	в	0.999896	0.000043	0.0014	0.000104	0
10^5	*а*	0.9997906	0.23314	0.001031	0.000209	3.140
	б	1.000096	0.016707	0.000275	0.0000956	11.532
	в	0.9999996	0.000042	0.000013	$0.44\cdot10^{-6}$	6.781

Отримані результати свідчать, що спосіб в) є найбільш ефективний.

На рис. 3.4.1 співставлено графік підінтегральної функції з функціями щільності імовірності, що використовувалися в кожному із трьох способів. На цьому рис. Видно, що функції *sin*(*x*) практично повністю співпадає з функцією щільності імовірності в третьому способі.

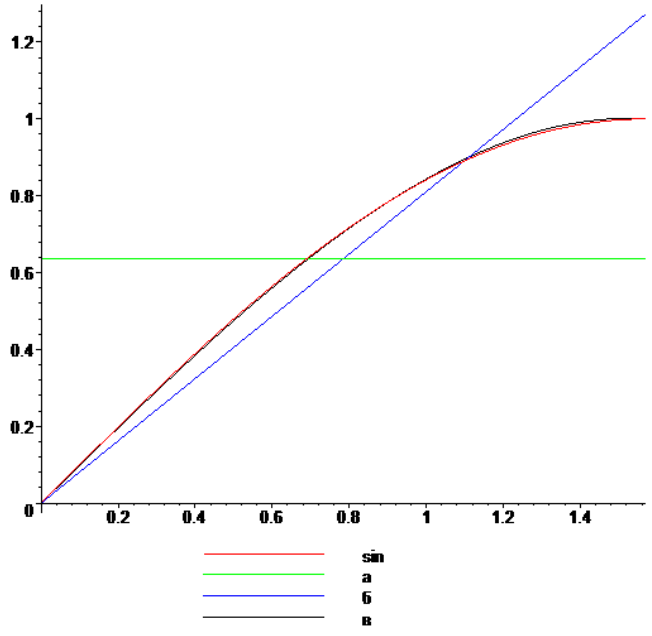


Рис. 3.4.1.

◄

Приклад 3.4.2. Обчислити наближено методом Монте-Карло інтеграл

$$I = \int_0^{\sqrt{2\cdot\pi}} \sin\left(t^2\right)\cdot dt\,.$$

Розв'язування.

Точне значення заданого інтеграла можемо легко обчисли за допомогою системи Maple:

```
Int(sin(t^2),t=0..sqrt(2*Pi))=evalf(Int(sin(t^2),t=0..sqrt(2*Pi
)));
```

$$\int_0^{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt = 0.4304077247$$

Зробимо заміну

$$I = \int_0^{\sqrt{2\cdot\pi}} \sin\left(t^2\right)\cdot dt = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot u,\ dt = \sqrt{2\cdot\pi}\cdot du \\ t = 0 \Rightarrow u = 0;\ t = \sqrt{2\cdot\pi} \Rightarrow u = 1 \end{array}\right] =$$

$$= \sqrt{2\cdot\pi}\cdot\int_0^1 \sin\left(2\cdot\pi\cdot u^2\right)\cdot du$$

Якщо $u_1, u_2, ..., u_n$ — можливі значення рівномірно розподіленої на проміжку (0; 1) випадкової величини U, то

$$I \approx I_N = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sin\left(2\cdot\pi\cdot u_i^2\right).$$

Обчислення здійснюватимемо за допомогою системи Maple.

```
restart:
st:=time():
N:=1*10^5:
In:=0:
for i to N do
In:=In+evalf(sin(2*Pi*(rand()/999999999990)^2))
end do:
I=evalf(sqrt(2*Pi)*In/N);
time()-st;
```

$$I = 0.4344961138$$

$$4.468$$

◄

Приклад 3.4.3. Обчислити наближено методом Монте-Карло інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} z(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot dt,\ \lambda > 0\,.$$

Розв'язування.

Використовуватимемо показникову функцію щільності імовірності $f(t) = \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$, тоді

$$I=\int_0^{\infty} z(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot dt=\int_0^{\infty}\frac{z(t)}{\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot dt$$

і якщо y_i – незалежні значення випадкової величини зі щільністю $f(t)$, то оцінкою I_N інтеграла I є

$$I\approx I_N=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{z(y_i)}{\lambda}.$$

З урахуванням (3.3.6) остання формула набуде вигляду

$$I\approx I_N=\frac{1}{\lambda\cdot N}\cdot\sum_{i=1}^{N} z\left(\frac{-\ln(u_i)}{\lambda}\right).$$

де $u_1,u_2,...,u_n$ — незалежні рівномірно розподілені на проміжку (0; 1) числа.

◀

Приклад 3.4.4. Обчислити наближено методом Монте-Карло подвійні інтеграли

а) $J=\int_0^1\int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cdot dxdy$;

б) $I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\cdot dxdy$; де $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}\le 0\right\}$;

в) $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)\cdot dy$;

Розв'язування.

Нескладно довести, що за значення інтеграла

$$J=\iint_D f(x,y)\cdot dxdy;$$

відповідно до методу Монте-Карло можна взяти число

$$J\approx I_N=\frac{S_D}{N_D}\cdot\sum_{i=1}^{N_D} f(u_i,v_i). \qquad (3.4.6)$$

де S_D — площа області інтегрування D, N_D — число випадкових точок (u, v), які попали в область D.

а) Область інтегрування D є одиничним квадратом, отже, на основі (3.4.6), отрисаємо

$$I_N=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} f(u_i,v_i).$$

де N — число випадкових точок; u_i,v_i - незалежні рівномірно розподілені на проміжку (0; 1) числа.

Наведемо програму в середовищі Maple, що реалізує ці обчислення.

```
restart:
f:=(x,y)->exp(-(x^2+y^2)):
#y1:=x->1;
```

```
#y2:=x->1;
st:=time():
LN:=[10,10^2,10^3]:
for i to nops(LN) do
 S:=0:
 N:=LN[i]:
 for k to N do
  xi:=rand()/999999999990:
  yi:=rand()/999999999990:
  S:=evalf(S+f(xi,yi)):
 end do:
 In:=S/N;print('N'=k-1,'In'=In,abs('In'-
J)=abs(.5577462854-In));
end do:
time()-st;
```

$$N=10,\ In=0.5148173004,\ |In-J|=0.0429289850$$

$$N=100,\ In=0.5461300614,\ |In-J|=0.0116162240$$

$$N=1000,\ In=0.5481695359,\ |In-J|=0.0095767495$$

$$0.015$$

Отримані результати свідчать, що реальна точність зростає приблизно пропорційно збільшенню випадковихточок, що генеруються.

б) Шляхом нескладних перетворень можна показати, що бласть інтегрування D є круг радіуса 0.5 з центром в точці (0.5; 0.5):

$$D=\left\{(x,y)\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}^2\right)\right.\right\}.$$

Якщо u_i, v_i - незалежні рівномірно розподілені на проміжку (0; 1) числа, то умова належності точки u_i, v_i до області інтегрування має вигляд

$$\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_i-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}.$$

Наведемо програму в середовищі Maple та відповідні результати обчислень.

```
restart:
f:=(x,y)->x^2+y^2:
st:=time():
LN:=[10,10^2,10^3,10^5]:
for i to nops(LN) do
 s:=0:k:=0:
 N:=LN[i]:
 for j to N do
  xi:=rand()/999999999990:
  yi:=rand()/999999999990:
```

```
  if evalf((xi-1/2)^2+(yi-1/2)^2)<1/4 then
   s:=evalf(s+f(xi,yi)):k:=k+1
  end if
 end do:
 In:=s/N;print('N'=j-1,'In'=In,abs('In'-
J)=abs(.5577462854-In),S[D]=evalf(k/N));
end do:
```

$$N = 10,\ In = 0.4439118174,\ |In - J| = 0.1138344680,\ S_D = 0.7000$$

$$N = 100,\ In = 0.5108274858,\ |In - J| = 0.0469187996,\ S_D = 0.7900$$

$$N = 1000,\ In = 0.4889685028,\ |In - J| = 0.0687777826,\ S_D = 0.7760$$

$$N = 100000,\ In = 0.4900732695,\ |In - J| = 0.0676730159,\ S_D = 0.7850$$

$$1.750$$

В кожному випадку величина S_D обчислена як відношення числа випадкових точок (u, v), які попали в область D, до загального числа згенерованих точок N.

в) Область інтегрування D є підмножиною одиничного квадрату, отже і в цьому випадку маємо забезпечити перевірку всіх згенерованих точок на належність до області інтегрування.

$$y_i^2 < x_i^2 < \sqrt{y_i}\,.$$

Наведемо програму в середовищі Maple та відповідні результати обчислень разом з їх геометричною інтерпретацією.

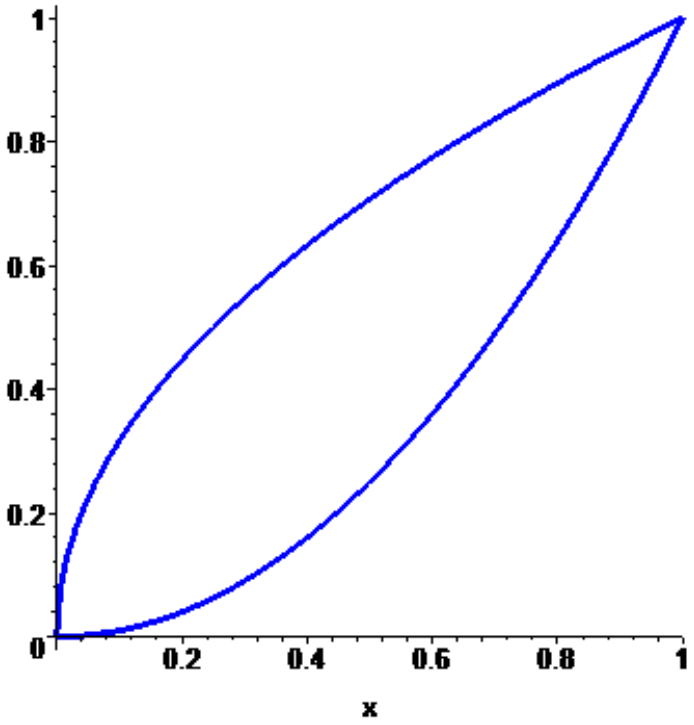
```
restart:with(student):
f:=(x,y)->x^2+y:
y1:=x->x^2:
y2:=x->sqrt(x):
I=Doubleint(f(x,y),x,y,D);
int(int(f(x,y),y=y1(x)..y2(x)),x=0..1):
I=%,I=evalf(%);

printf(`Область інтегрування`);
plot({y1(x),y2(x)},x=0..1,color=blue,thickness=3);
```

$$I = \int\int_D x^2 + y\,dx\,dy$$

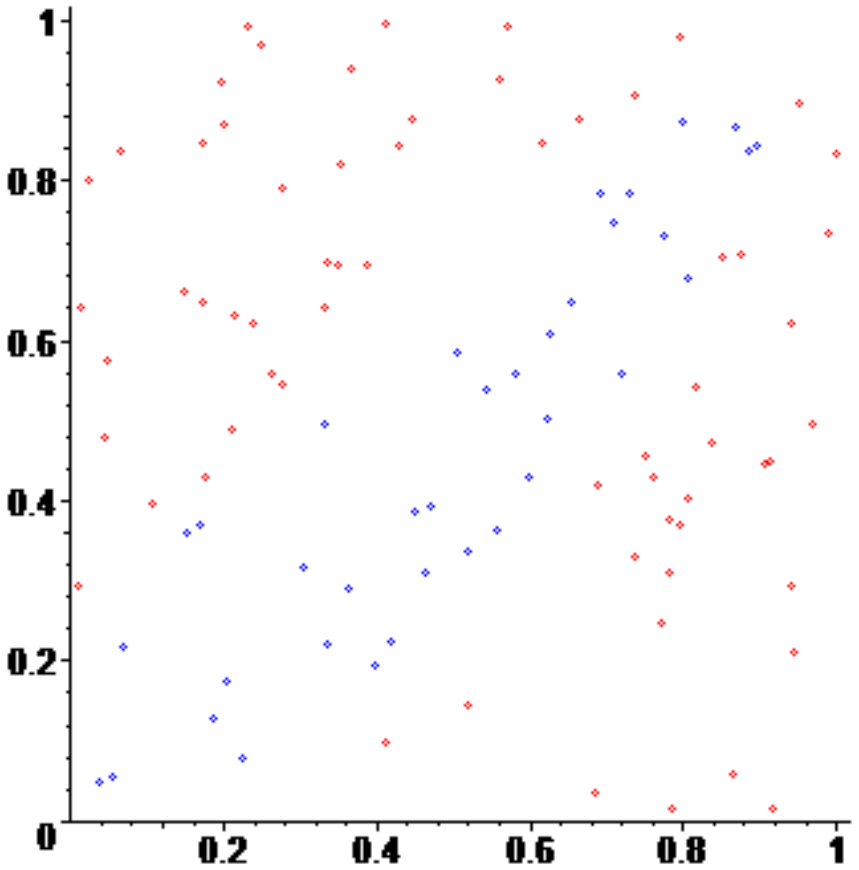
$$I = \frac{33}{140},\ I = 0.2357142857$$

Область інтегрування

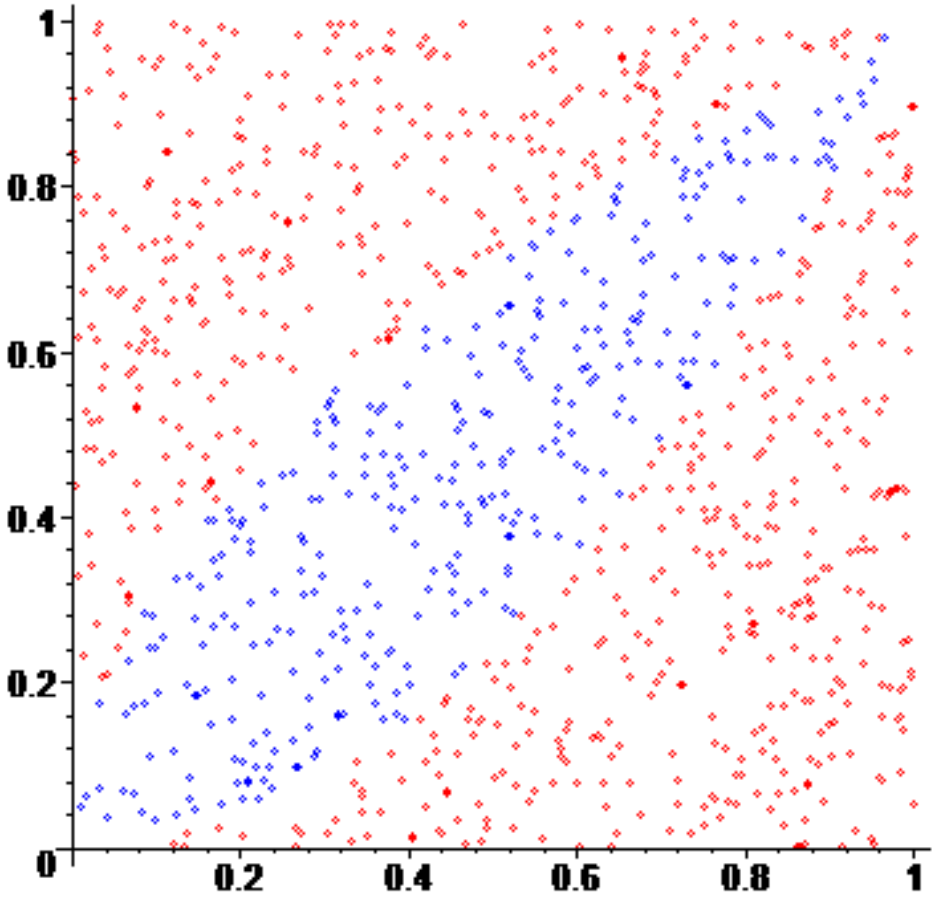



```
with(plots):with(stats):
st:=time():
LN:=[100,1000,10^4]:
for j from 1 to nops(LN) do
 N:=LN[j];
k:=0: q:=`q`:s:=0:
for i from 1 to N do
  xi:=rand()/999999999990:
  yi:=rand()/999999999990:
  if yi>evalf(y1(xi)) and yi<evalf(y2(xi)) then
   k:=k+1:s:=evalf(s+f(xi,yi)):

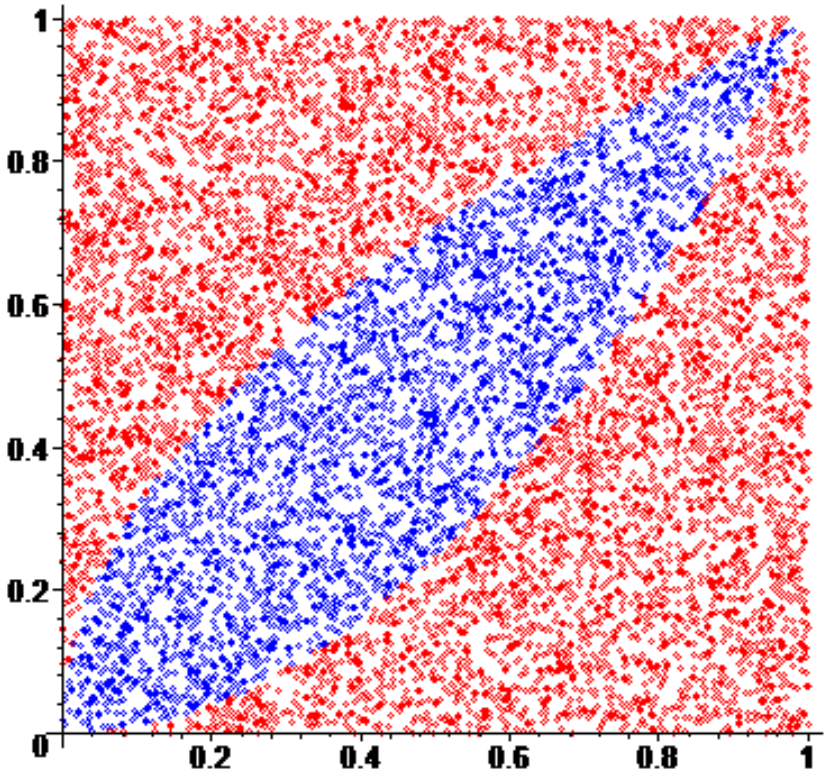
q[i]:=pointplot({[xi,yi]},color=blue,symbol=circle,sym
bolsize=6):
  else
   q[i]:=pointplot({[xi,yi]},color=red,symbolsize=6)
  end if:
 end do:
In:=s/n;
display(convert(q,list));print(%);
In:=s/N;print('N'=i-1,'In'=In,abs('In'-
J)=abs(.2357142857-In),S[D]=evalf[4](k/N));
end do:
time()-st;
```



$N = 100,\ In = 0.2742670865,\ |In - J| = 0.0385528008,\ S_D = 0.3600$



$N = 1000,\ In = 0.2341849649,\ |In - J| = 0.0015293208,\ S_D = 0.3300$



$N = 10000,\ In = 0.2357599087,\ |In - J| = 0.0000456230,\ S_D = 0.3326$

◀

Наближене обчислення інтегралів методом Монте-Карло стає більш ефективним в порівнянні з квадратурними формулами вже для потрійних інтегралів і з ростом кратності інтегралів ефективність збільшується.

3.4.2. Завдання для самостійної роботи

Обчислити наближено методом Монте-Карло невласний інтеграл. За функцію щільності імовірності взяти задану показникову функцію $f(t)$.

$$[1.],\ \int_0^\infty t\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [2.],\ \int_0^\infty t^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[3.],\ \int_0^\infty t^3\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [4.],\ \int_0^\infty t^4\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[5.],\ \int_0^\infty \sin(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [6.],\ \int_0^\infty \sin(2\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[7.],\ \int_0^{\infty} \sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [8.],\ \int_0^{\infty} \sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[9.],\ \int_0^{\infty} \sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [10.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[11.],\ \int_0^{\infty} \cos(2\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [12.],\ \int_0^{\infty} \cos(3\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[13.],\ \int_0^{\infty} \cos(4\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [14.],\ \int_0^{\infty} \cos(5\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[15.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [16.],\ \int_0^{\infty} \ln(2\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[17.],\ \int_0^{\infty} \ln(3\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)},\ [18.],\ \int_0^{\infty} \ln(4\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$$

$$[19.],\ \int_0^{\infty} t\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)},\ [20.],\ \int_0^{\infty} t^2\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}$$

$$[21.],\ \int_0^{\infty} t^3\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)},\ [22.],\ \int_0^{\infty} t^4\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}$$

$$[23.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)},\ [24.],\ \int_0^{\infty} \sin(2\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}$$

$$[25.],\ \int_0^{\infty} \sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)},\ [26.],\ \int_0^{\infty} \sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}$$

$$[27.],\ \int_0^{\infty} \sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)},\ [28.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}\,dt,\qquad \mathrm{f}(t)=\frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{2\,t}{3}\right)}$$

$$[29.],\ \int_0^{\infty} \cos(2t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)},\ [30.],\ \int_0^{\infty} \cos(3t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}$$

$$[31.],\ \int_0^{\infty} \cos(4t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)},\ [32.],\ \int_0^{\infty} \cos(5t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}$$

$$[33.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)},\ [34.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}$$

$$[35.],\ \int_0^{\infty} \ln(3t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)},\ [36.],\ \int_0^{\infty} \ln(4t)\, e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2t}{3}\right)}$$

$$[37.],\ \int_0^{\infty} t\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [38.],\ \int_0^{\infty} t^2\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[39.],\ \int_0^{\infty} t^3\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [40.],\ \int_0^{\infty} t^4\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[41.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [42.],\ \int_0^{\infty} \sin(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[43.],\ \int_0^{\infty} \sin(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [44.],\ \int_0^{\infty} \sin(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[45.],\ \int_0^{\infty} \sin(5t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [46.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[47.],\ \int_0^{\infty} \cos(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [48.],\ \int_0^{\infty} \cos(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[49.],\ \int_0^{\infty} \cos(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [50.],\ \int_0^{\infty} \cos(5t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[51.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [52.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[53.],\ \int_0^{\infty} \ln(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)},\ [54.],\ \int_0^{\infty} \ln(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{2}e^{\left(-\frac{3t}{2}\right)}$$

$$[55.],\ \int_0^{\infty} t\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [56.],\ \int_0^{\infty} t^2\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[57.],\ \int_0^{\infty} t^3\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [58.],\ \int_0^{\infty} t^4\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[59.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [60.],\ \int_0^{\infty} \sin(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[61.],\ \int_0^{\infty} \sin(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [62.],\ \int_0^{\infty} \sin(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[63.],\ \int_0^{\infty} \sin(5t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [64.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[65.],\ \int_0^{\infty} \cos(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [66.],\ \int_0^{\infty} \cos(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[67.],\ \int_0^{\infty} \cos(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [68.],\ \int_0^{\infty} \cos(5t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[69.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [70.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[71.],\ \int_0^{\infty} \ln(3t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)},\ [72.],\ \int_0^{\infty} \ln(4t)\, e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{3}{4}e^{\left(-\frac{3t}{4}\right)}$$

$$[73.],\ \int_0^{\infty} t\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [74.],\ \int_0^{\infty} t^2\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[75.],\ \int_0^{\infty} t^3\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [76.],\ \int_0^{\infty} t^4\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[77.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [78.],\ \int_0^{\infty} \sin(2t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[79.],\ \int_0^{\infty} \sin(3t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [80.],\ \int_0^{\infty} \sin(4t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[81.],\ \int_0^{\infty} \sin(5t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [82.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[83.],\ \int_0^{\infty} \cos(2t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [84.],\ \int_0^{\infty} \cos(3t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[85.],\ \int_0^{\infty} \cos(4t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [86.],\ \int_0^{\infty} \cos(5t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[87.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [88.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[89.],\ \int_0^{\infty} \ln(3t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\ f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)},\ [90.],\ \int_0^{\infty} \ln(4t)\, e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}\, dt,\quad f(t)=\frac{4}{3}e^{\left(-\frac{4t}{3}\right)}$$

$$[91.],\ \int_0^{\infty} t\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)},\ [92.],\ \int_0^{\infty} t^2\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)}$$

$$[93.],\ \int_0^{\infty} t^3\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)},\ [94.],\ \int_0^{\infty} t^4\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)}$$

$$[95.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)},\ [96.],\ \int_0^{\infty} \sin(2t)\, e^{(-t)}\, dt,\ f(t)=e^{(-t)}$$

$$[97.],\ \int_0^{\infty} \sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [98.],\ \int_0^{\infty} \sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[99.],\ \int_0^{\infty} \sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [100.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[101.],\ \int_0^{\infty} \cos(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [102.],\ \int_0^{\infty} \cos(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,$$
$$\mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[103.],\ \int_0^{\infty} \cos(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [104.],\ \int_0^{\infty} \cos(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,$$
$$\mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[105.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [106.],\ \int_0^{\infty} \ln(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[107.],\ \int_0^{\infty} \ln(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)},\ [108.],\ \int_0^{\infty} \ln(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=\mathbf{e}^{(-t)}$$

$$[109.],\ \int_0^{\infty} t\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)},\ [110.],\ \int_0^{\infty} t^2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

$$[111.],\ \int_0^{\infty} t^3\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)},\ [112.],\ \int_0^{\infty} t^4\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

$$[113.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)},\ [114.],\ \int_0^{\infty} \sin(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,$$
$$\mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

$$[115.],\ \int_0^{\infty} \sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)},\ [116.],\ \int_0^{\infty} \sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,$$
$$\mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

$$[117.],\ \int_0^{\infty} \sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)},\ [118.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\,dt,$$
$$\mathrm{f}(t)=2\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

[119.], $\int_0^\infty \cos(2t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$, [120.], $\int_0^\infty \cos(3t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$

[121.], $\int_0^\infty \cos(4t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$, [122.], $\int_0^\infty \cos(5t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$

[123.], $\int_0^\infty \ln(t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$, [124.], $\int_0^\infty \ln(2t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$

[125.], $\int_0^\infty \ln(3t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$, [126.], $\int_0^\infty \ln(4t)\, e^{(-2t)}\, dt$, $f(t) = 2\, e^{(-2t)}$

[127.], $\int_0^\infty t\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [128.], $\int_0^\infty t^2\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

[129.], $\int_0^\infty t^3\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [130.], $\int_0^\infty t^4\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

[131.], $\int_0^\infty \sin(t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [132.], $\int_0^\infty \sin(2t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

[133.], $\int_0^\infty \sin(3t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [134.], $\int_0^\infty \sin(4t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

[135.], $\int_0^\infty \sin(5t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [136.], $\int_0^\infty \cos(t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

[137.], $\int_0^\infty \cos(2t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$, [138.], $\int_0^\infty \cos(3t)\, e^{(-3t)}\, dt$, $f(t) = 3\, e^{(-3t)}$

$$[139.],\ \int_0^{\infty} \cos(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,\ f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)},\ [140.],\ \int_0^{\infty} \cos(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}$$

$$[141.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,\ f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)},\ [142.],\ \int_0^{\infty} \ln(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}$$

$$[143.],\ \int_0^{\infty} \ln(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,\ f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)},\ [144.],\ \int_0^{\infty} \ln(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=3\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}$$

$$[145.],\ \int_0^{\infty} t\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [146.],\ \int_0^{\infty} t^2\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[147.],\ \int_0^{\infty} t^3\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [148.],\ \int_0^{\infty} t^4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[149.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [150.],\ \int_0^{\infty} \sin(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[151.],\ \int_0^{\infty} \sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [152.],\ \int_0^{\infty} \sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[153.],\ \int_0^{\infty} \sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [154.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[155.],\ \int_0^{\infty} \cos(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [156.],\ \int_0^{\infty} \cos(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[157.],\ \int_0^{\infty} \cos(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,\ f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)},\ [158.],\ \int_0^{\infty} \cos(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}\,dt,$$

$$f(t)=4\,\mathbf{e}^{(-4\,t)}$$

$$[159.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{(-4t)}\, dt,\ f(t) = 4\, e^{(-4t)},\ [160.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{(-4t)}\, dt,$$

$$f(t) = 4\, e^{(-4t)}$$

$$[161.],\ \int_0^{\infty} \ln(3t)\, e^{(-4t)}\, dt,\ f(t) = 4\, e^{(-4t)},\ [162.],\ \int_0^{\infty} \ln(4t)\, e^{(-4t)}\, dt,$$

$$f(t) = 4\, e^{(-4t)}$$

$$[163.],\ \int_0^{\infty} t\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [164.],\ \int_0^{\infty} t^2\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[165.],\ \int_0^{\infty} t^3\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [166.],\ \int_0^{\infty} t^4\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[167.],\ \int_0^{\infty} \sin(t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [168.],\ \int_0^{\infty} \sin(2t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[169.],\ \int_0^{\infty} \sin(3t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [170.],\ \int_0^{\infty} \sin(4t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[171.],\ \int_0^{\infty} \sin(5t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [172.],\ \int_0^{\infty} \cos(t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[173.],\ \int_0^{\infty} \cos(2t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [174.],\ \int_0^{\infty} \cos(3t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[175.],\ \int_0^{\infty} \cos(4t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [176.],\ \int_0^{\infty} \cos(5t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[177.],\ \int_0^{\infty} \ln(t)\, e^{(-5t)}\, dt,\ f(t) = 5\, e^{(-5t)},\ [178.],\ \int_0^{\infty} \ln(2t)\, e^{(-5t)}\, dt,$$

$$f(t) = 5\, e^{(-5t)}$$

$$[179.],\int_0^{\infty}\ln(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-5\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=5\,\mathbf{e}^{(-5\,t)},\ [180.],\int_0^{\infty}\ln(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-5\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=5\,\mathbf{e}^{(-5\,t)}$$

$$[181.],\int_0^{\infty}t\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [182.],\int_0^{\infty}t^2\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[183.],\int_0^{\infty}t^3\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [184.],\int_0^{\infty}t^4\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[185.],\int_0^{\infty}\sin(t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [186.],\int_0^{\infty}\sin(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[187.],\int_0^{\infty}\sin(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [188.],\int_0^{\infty}\sin(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[189.],\int_0^{\infty}\sin(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [190.],\int_0^{\infty}\cos(t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[191.],\int_0^{\infty}\cos(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [192.],\int_0^{\infty}\cos(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[193.],\int_0^{\infty}\cos(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [194.],\int_0^{\infty}\cos(5\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[195.],\int_0^{\infty}\ln(t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [196.],\int_0^{\infty}\ln(2\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

$$[197.],\int_0^{\infty}\ln(3\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,\ \mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)},\ [198.],\int_0^{\infty}\ln(4\,t)\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}\,dt,$$

$$\mathrm{f}(t)=6\,\mathbf{e}^{(-6\,t)}$$

3.4.3 Статистичне моделювання властивостей штучних імплантів

За допомогою методу Монте-Карло визначити статистичні характеристики і очікуваний відсоток браку по міцності на стиск σ_{fc} при виробництві матеріалу для штучного імпланта, якщо встановлена емпірична залежність між границею міцності (МПа) та хімічним складом вказаного матеріалу (%):

$$\sigma_{fc} = 477.335 - 82.025 \cdot A + 34.675 \cdot B - 4.475 \cdot C . \qquad (3.4.7)$$

де A, B, C - процентний вміст кожного із трьох певних компонентів відповідно.

Відомо, що при виробництві матеріалу для штучного імпланта використовують наступний хімічний склад: A = 3,4%, B = 1,8%, C = 0,7%. Експериментальним шляхом встановлено, що хімічний склад через неточності дозування і інших випадкових збурень має випадкові відхилення, що добре узгоджується з нормальним розподілом. Стандартні відхилення для кожного з компонентів: σ_A = 0,5%; σ_B = 0,3%; σ_C = 0,2%.

Придатними вважаються зразки з міцністю, що перевищує $\left(\sigma_{fc}\right)_{cv}$ =240 МПа.

Кількість випробувань має забезпечити потрапляння отриманих значень в заданий ε-окіл (ε = 5%) з імовірністю $P(\varepsilon)$ = 0,97.

Перш за все, оцінимо міцність за за співвідношенням (3.4.7) з урахуванням відсоткового змісту компонентів матеріалу, без урахування можливих відхилень:

```
Sc:=(A,B,C)->477.335-82.025*A+34.675*B-4.475*C:
sigma[fc]=Sc(3.4,1.8,0.7);
```

$$\sigma_{fc} = 257.7325$$

Видно, що ця міцність задовольняє вимогам із запасом і забезпечує якість матеріалу за даним показником.

Визначимо мінімальне число випробувань $N_{\min}$ для здійснення моделювання за вказаних умов.

Відповідно центральній граничній теоремі перепишемо (3.3.1) у такому вигляді

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{fc}\right)_i - u\right| < \frac{t_\beta \cdot \sigma}{\sqrt{N}}\right\} \approx 2\cdot\Phi(t_\beta),$$

де

$$\frac{t_\beta \cdot \sigma}{\sqrt{N}} = \varepsilon .$$

З останнього співвідношення випливає

$$N_{\min} > \left(\frac{t_\beta \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 .$$

Для заданої імовірності $P = 0{,}97$ обчислимо величину t_β:

```
F:=x->int(exp(-t^2/2),t=0..x)/sqrt(2*Pi):
2*F(t[beta])=0.97;
t[beta]:=fsolve(%,t[beta]);
```

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, t_\beta\right) = 0.97$$

$$t_\beta := 2.170090378$$

При визначені мінімального числа випробувань $N_{\min}$ за формулою (3.4.4) величину середнього квадратичного відхилення беремо рівною найбільшому значенню із заданих, тобто $\sigma = \sigma_A = 0{,}5$, тоді

$$N_{\min} > \left(\frac{t_\beta \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{2.17 \cdot 0.5}{0.05} \right)^2 \approx 471.$$

Випадкове значення вмісту кожного з компонентів в матеріалі для штучного імпланта моделюватимемо за допомогою формули (3.3.7), тобто

$$X_A = 3.4 + 0.5 \cdot X_1$$

$$X_B = 1.8 + 0.3 \cdot X_2$$

$$X_A = 0.7 + 0.2 \cdot X_3$$

де $X_i, (i = 1,2,3)$ - незалежні випадкові величини, що мають стандартний нормальний розподіл.

Виберемо число випробувань , тоді

```
restart:
Sc:=(A,B,C)->477.335-82.025*A+34.675*B-4.475*C:
N:=500:s:=0:scv:=0:dx:=0:
for i to N do
 X1:=stats[random, normald](1):
 X2:=stats[random, normald](1):
 X3:=stats[random, normald](1):
 X[A]:=3.4+0.5*X1:
 X[B]:=1.8+0.3*X1:
 X[C]:=0.7+0.2*X1:
 si:=Sc(X[A],X[B],X[C]):
```

```
 s:=s+si;dx:=dx+si^2;
 if si<=240 then scv:=scv+1 end if
end do:
printf(`Оцінка математичного сподівання`);
m[x]=evalf(s/N);
printf(`Оцінка середнього квадратичного відхилення`);
sigma[x]=evalf(sqrt(dx/N-rhs(%)^2));
printf(`Оцінка відсотка бракованої продукції`);
evalf(scv/N)*100;
```

Оцінка математичного сподівання

$$m_x = 258.3899480$$

Оцінка середнього квадратичного відхилення

$$\sigma_x = 30.67949527$$

Оцінка відсотка бракованої продукції

$$27.40000000$$

Із отриманих результатів випливає, що чверть виготовленої продукції може бути бракованою. Це свідчить про необхідність зміни технології виробництва матеріалу для штучного імпланта з метою підвищення середнього значення міцності або зменшення величини розсіювання відповідних значень.

Список літератури

1. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2003. – 648 с.
2. Михалевич В. М. Maple. Комп’ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Частина І. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія.: навч. посіб., Вінниця: ВНТУ, 2004. — 111 с.
3. Найко Д. А.Вища математика : лінійна алгебра :навчальний посібник / Найко Д.А., Краєвський В.О., Коломієць А.А. – Вінниця : ВНТУ, 2019. 111 с.
4. Павленко А.В., Копорулін В.Л., Кагадій Л.П., Моссаковська Л.В. Вища математика. Розділ “Ряди та інтеграл Фур’є”: Навч. посібник. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2015. 92 с.
5. Томусяк А. А., Трохименко В. С., Шунда Н. М.. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Частина перша., Вінниця: ВДПУ, 2013, 334 с.
6. Добровольська К.В. Практикум з теорії ймовірностей для студентів економічних спеціальностей: навчальний посібник / К.В. Добровольська, В.М. Михалевич. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 120 с.
7. Дерець Є. В. Дослідження готовності студентів до використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / Є. В. Дерець // Збірник наукових праць Дніпровського державного університету. - 2017. - Режим доступу: http://sj-dstu.dp.ua/index.php/sjdstu/article/view/153/163
8. Мороховець Г. Ю. Використання системи комп'ютерної математики MAPLE у навчанні медичній і біологічній фізиці / Г. Ю. Мороховець, М. С. Саєнко, Ю. В. Лисанець, О. В. Сілкова // Проблеми екології та медицини. - 2018. - Т. 22, № 1-2. - С. 60-62.
9. Михалевич В. М. Використання систем компютерної математики у процесі навчання лінійного програмування студентів ВНЗ: монографія / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. – Вінниця: ВНТУ, 2016. – 279 с. ISBN 978-966-641-670-7
10. Luengo, D., Martino, L., Bugallo, M., Elvira, V., and Särkkä, S.:A survey of Monte Carlo methods for parameter estimation, Eurasip. J. Adv. Sig. Pr., 25, https://doi.org/10.1186/s13634-020-00675-6, 2020.
11. L. Martino, J. Read, D. Luengo, Independent doubly adaptive rejection Metropolis sampling within Gibbs sampling. IEEE Trans. Signal Process. 63(12), 3123–3138 (2015)
12. V. Elvira, L. Martino, D. Luengo, M. F. Bugallo, Improving Population Monte Carlo: Alternative weighting and resampling schemes. Signal Process. 131(12), 77–91 (2017)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication / communication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsibility for any use which may be made of the information contained therein.